

2013年6月20日

経済セミナー 2013年8,9月号

「オークションとマーケットデザイン」第6回

誘因整合性、表明原理、同値定理

松島 斉

東京大学経済学研究科教授

前回では、単一種一単位の財取引という限定された配分問題について、一位価格入札、二位価格入札など、標準的なオークションルールを考察し、配分の効率性、入札者の期待利得や期待支払額、売り手の期待収入を比較分析した。今回は、一般的な配分問題、一般的なメカニズム（オークションルール）について、比較分析のための基本定理を解説する。

前回で示されたように、分布対称性下では、一位価格入札と二位価格入札は、ともに効率的配分を達成し、しかも、同じ期待支払額、同じ期待利得、同じ期待収入をもたらす。つまり、一位価格入札と二位価格入札の間では、「同値性」が成立している。

今回のハイライトは、この同値性を、一般的な配分問題、一般的なメカニズムデザインに拡張して、期待利得、期待支払額、期待収入についての「同値定理 (Equivalence Theorems)」を示すことにある。同じ配分ルールを達成させるメカニズムであれば、どのメカニズムであっても、実質的に同じ期待収入、同じ期待支払額、同じ期待利得がもたらされることが示される。

同値定理は、オークション理論において、とりわけ重要度の高い基本定理になる。¹

1. 直接メカニズム

メカニズムは、メッセージ・プロファイル集合 $M = \times_{i \in N} M_i$ 、配分ルール $g: \Omega \rightarrow A$ 、支払ルール $x = (x_i)_{i \in N}$ の組み合わせ、 (M, g, x) として定義される。 Ω_i はプレイヤー（入札者） $i \in N$ のタイプ集合、 $\Omega = \times_{i \in N} \Omega_i$ は状態集合、 A は配分集合、 M_i はプレイヤー i のメッセージ集合、 $x_i: M \rightarrow R$ はプレイヤー i の支払ルールである。

メカニズム (M, g, x) は、各プレイヤーのメッセージ集合がタイプ集合と一致している場合、つまり

$$M_i = \Omega_i \text{ for all } i \in N$$

である場合、「直接メカニズム (Direct Mechanism)」と呼ばれる。直接メカニズムでは、配分ルールおよび支払ルールは

$$g: \Omega \rightarrow A, \quad x_i: \Omega \rightarrow R$$

と表わされる。直接メカニズムは、メッセージ集合の表記を省略して、 (g, x) と表すことができる。

直接メカニズムにおいて、各プレイヤーは、自身のタイプがどれであることを直接的に表明する。もっとも、せり上げオークションなど、実際に使われているルールの多くは、直接メカニズムでなく、間接メカニズム (Indirect Mechanism)、つまり、指値などを通じてタイプを間接的に表明するやり方をとっている。

しかし、以下に説明されるように、任意のメカニズムに対して、それと同じ配分および支払いをもたらす別の直接メカニズムが必ず存在することが示され

¹ 今回の内容を補助する文献として、Krishna (2009, Chapters 3 and 6), Milgrom (2004, Chapter 3) がある。Myerson (1981) は、今回の内容についての代表的な古典である。同時期に書かれた Riley and Samuelson (1981) も重要文献である。

る。この性質は、「表明原理 (Revelation Principle)」と呼ばれる。表明原理は、メカニズムデザインによって達成できる配分と支払の範囲の全貌を理論的に明らかにする際に、とても有用になる。

2. 誘因整合性

直接メカニズム (g, x) において、各プレーヤー i が常に正直にタイプを表明する戦略を「正直戦略 (Honest (Truthful, Sincere) Strategy)」と呼び、 $s_i^* : \Omega_i \rightarrow \Omega_i$ と表す。つまり、任意のタイプ $\omega_i \in \Omega_i$ について、

$$s_i^*(\omega_i) = \omega_i$$

と定義される。直接メカニズムにおいて、正直戦略プロファイル $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$ が何らかの意味で均衡である場合、この直接メカニズムは誘因整合的 (Incentive Compatible) であると呼ばれる。

優位戦略誘因整合性: 直接メカニズム (g, x) は、正直戦略プロファイルが優位戦略プロファイルである場合、つまり、任意の $i \in N$, $\omega \in \Omega$, $\omega'_i \in \Omega_i$ について、

$$(1) \quad U_i(g(\omega), x_i(\omega), \omega_i, \omega'_i) \geq U_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), x_i(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega_i, \omega'_i)$$

が成立する場合、優位戦略について誘因整合的 (Incentive Compatible in Dominant Strategies, DIC) であると呼ばれる。 $U_i(a, t_i, \omega)$ は、状態 $\omega \in \Omega$ における、配分 $a \in A$ 、支払額 $t_i \in R$ に対するプレーヤー i の利得である。

事後均衡誘因整合性: 直接メカニズム (g, x) は、正直戦略プロファイルが事後均衡である場合、つまり、任意の $i \in N$, $\omega \in \Omega$, $\omega'_i \in \Omega_i$ について、

$$(2) \quad U_i(g(\omega), x_i(\omega), \omega) \geq U_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), x_i(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega)$$

が成立する場合、事後均衡について誘因整合的 (Incentive Compatible in Ex Post Equilibrium, EPIC) であると呼ばれる。

ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性：直接メカニズム (g, x) は、正直戦略プロファイルがベイジアン・ナッシュ均衡である場合、つまり、任意の $i \in N$, $\omega_i \in \Omega_i$, $\omega'_i \in \Omega_i$ について、

$$(3) \quad E[U_i(g(\omega), x_i(\omega), \omega) | \omega_i] \geq E[U_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), x_i(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega) | \omega_i]$$

が成立する場合、ベイジアン・ナッシュ均衡について誘因整合的 (Bayesian Incentive Compatible, BIC) であると呼ばれる。ここで、 $E[\cdot | \omega_i]$ は、 ω_i についての、タイプ ω_i の条件付き期待値を意味する。

優位戦略プロファイルは、必ず事後均衡でもあり、また、事後均衡ば、必ずベイジアン・ナッシュ均衡でもある。よって、直接メカニズムが優位戦略について誘因整合的 (DIC) であるならば、必ず事後均衡についても誘因整合的 (EPIC) であり、また、事後均衡について誘因整合的 (EPIC) であれば、必ずベイジアン・ナッシュ均衡についても誘因整合的 (BIC) である。よって、BIC がもっとも制約の弱い誘因整合性概念である。

私的価値の仮定下では、正直戦略プロファイルが事後均衡であれば、それは必ず優位戦略プロファイルでもある。 $U_i(a, t_i, \omega)$ は ω_{-i} から独立であるから、優位戦略プロファイルの条件式 (1) と事後均衡の条件式 (2) は同じになる。よって、私的価値の仮定下では、優位戦略誘因整合性 (DIC) と事後均衡誘因整合性 (EPIC) は一致する。

3. 表明原理

メカニズムデザインによって、どのような配分と支払いを達成することができるか。この問いに答えるには、全てのメカニズムと均衡戦略プロファイルをしらみつぶしに調べるよりも、はるかに簡便なやり方がある。本節は、任意のメカニズムと均衡戦略プロファイルが達成する配分および支払いは、何らかの

誘因整合的な直接メカニズムによっても達成できることを示す。この性質は、「表明原理 (Revelation Principle)」と呼ばれる。つまり、誘因整合的な直接メカニズムだけを検討すれば、あらゆるメカニズムと均衡戦略プロファイルが達成できる配分と支払いの範囲の全貌を知ることができる。誘因整合的な直接メカニズムだけを調べれば、事足りるのである。

定理 6-1 (表明原理) : 任意のメカニズム (M, \hat{g}, \hat{x}) について、ある戦略プロファイル \hat{s} が優位戦略プロファイル (事後均衡、あるいはベイジアン・ナッシュ均衡) であるならば、以下に定義される直接メカニズム (g, x) は、優位戦略プロファイル (事後均衡、あるいはベイジアン・ナッシュ均衡) について誘因整合的である。直接メカニズム (g, x) は、

$$(4) \quad g(\omega) = \hat{g}(\hat{s}(\omega)) \text{ and } x(\omega) = \hat{x}(\hat{s}(\omega)) \text{ for all } \omega \in \Omega$$

と定義される。

証明 : メカニズム (M, \hat{g}, \hat{x}) において \hat{s} が優位戦略プロファイルであるため、任意の $i \in N$ 、 $\omega \in \Omega$ 、および $\omega' \in \Omega$ について、不等式

$$U_i(\hat{g}(\hat{s}(\omega)), \hat{x}_i(\hat{s}(\omega)), \omega_i, \omega'_i) \geq U_i(\hat{g}(\hat{s}(\omega')), \hat{x}_i(\hat{s}(\omega')), \omega_i, \omega'_i)$$

が成立する。この不等式に (4) を代入すれば、

$$U_i(g(\omega), x_i(\omega), \omega_i, \omega'_i) \geq U_i(g(\omega'), x_i(\omega'), \omega_i, \omega'_i)$$

が得られる。この不等式は (1) に一致し、直接メカニズム (g, x) が優位戦略誘因整合性をみたすことを意味する。

戦略プロファイル \hat{s} が事後均衡、あるいはベイジアン優位戦略プロファイルである場合も同様に証明できる。

Q.E.D.

等式群 (4) によって特定化された直接メカニズム (g, x) は、正直戦略プロファイル s^* によって、もとのメカニズム (M, \hat{g}, \hat{x}) および戦略プロファイル \hat{s} がも

たらず配分および支払いと同じものを達成している。よって、誘因整合的な直接メカニズムが達成できる配分と支払いの全体は、任意のメカニズムおよび均衡戦略プロファイルが達成できる配分と支払いの全体を網羅することになる。以上を根拠に、分析対象を誘因整合的な直接メカニズムに限定する。

4. 同値定理

本節より、準線形性 (Quasi-Linearity)、リスク中立性 (Risk Neutrality)、分布独立性 (Independent Type Distributions) を仮定する。断りのない限り、私的価値 (Private Values) は仮定しなくていい。

重要な仮定として、タイプ集合を実数閉区間

$$\Omega_i = [0,1] \text{ for all } i \in N$$

とする。タイプを多次元ベクトルとしても、例えば $\Omega_i = [0,1]^m$ としても、以下の議論に差し支えない。ただし、後述するように、タイプ集合が離散である場合には、以下の議論は成り立たない。

任意の直接メカニズム (g, x) が、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性 (BIC) をみたしているとする。他のプレイヤーが正直戦略に従うと想定した上で、タイプ ω_i のプレイヤー i が ω'_i を表明した時の期待利得を

$$y_i(\omega'_i, \omega_i) \equiv E[v_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega) - x_i(\omega'_i, \omega_{-i}) | \omega_i]$$

と表す。正直に表明 ($\omega'_i = \omega_i$) した時の期待利得を

$$y_i^*(\omega_i) \equiv y_i(\omega_i, \omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega_i, \omega_{-i}) | \omega_i]$$

と表す。これらの表記を使うと、BIC の条件式 (3) は、

$$(5) \quad y_i^*(\omega_i) \geq y_i(\omega'_i, \omega_i) \text{ for all } i, \text{ all } \omega_i \text{ and all } \omega'_i$$

と表すことができる。

さらに、追加的な仮定として、正直に表明した際の期待利得 $y_i^*(\omega_i)$ は、タイプ ω_i のほぼいたるところで微分可能であるとする。あるいは、ある関数 $\rho: [0,1] \rightarrow R$ が存在して、

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} \rho(b)db + y_i^*(0) \text{ for all } \omega_i \in [0,1]$$

が成り立つ、つまり $y_i^*(\omega_i)$ は「絶対連続」である、と仮定する。

この仮定は、BIC がみたされるならば、非常に弱い制約条件である。BIC のもとでは、

$$\begin{aligned} y_i^*(\omega_i) &= \max_{\omega'_i} y_i(\omega'_i, \omega_i) \\ &= \max_{\omega'_i} E[v_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega) - x_i(\omega'_i, \omega_{-i}) | \omega_i] \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $v_i(a, \omega)$ が ω_i について連続であれば、 $y_i^*(\omega_i)$ は連続であり、タイプ ω_i のほぼいたるところで微分可能であるとしてよい。

以上の仮定の下で、任意の配分ルールを所与として、各プレイヤーのタイプごとの期待利得が、実質的に一意に定まることが証明できる。つまり、「利得同値定理 (Payoff Equivalence Theorem)」が、以下のように示される。

定理 6-2 (利得同値定理): 任意のベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性 (BIC) をみたす直接メカニズム (g, x) において、各プレイヤー i の任意のタイプ ω_i における期待利得は

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) | \omega'_i] d\omega'_i + y_i^*(0)$$

である。ここで、 $v_{i2}(a, \omega) \equiv \frac{\partial v_i(a, \omega)}{\partial \omega_i}$ と定義する。

利得同値定理は次節にて証明される。利得同値定理は、配分ルール g およびタイプ $\omega_i = 0$ の期待利得 $y_i^*(0)$ を所与とすれば、任意のタイプ ω_i について、期待利得 $y_i^*(\omega_i)$ が一意に定まることが意味する。よって、期待利得は、支払ルールの特定化の詳細から独立に定まる。異なる直接メカニズムであっても、配分ルールとタイプ $\omega_i = 0$ の期待利得が共通であれば、期待利得は常に一致することになる。

以下の二つの定理、「支払同値定理 (Payment Equivalence Theorem)」、および「収入同値定理 (Revenue Equivalence Theorem)」の証明は、利得同値定理からほぼ自明である。

定理 6 – 3 (支払同値定理): 任意の BIC をみたす直接メカニズム (g, x) において、各プレーヤーの任意のタイプ ω_i における期待支払額は

$$(6) \quad E[x_i(\omega) | \omega_i] = E[v_i(g(\omega), \omega) | \omega_i] \\ - \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) | \omega'_i] d\omega'_i - y_i^*(0)$$

である。

証明: 利得同値定理より、

$$y_i^*(\omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) | \omega_i] - E[x_i(\omega) | \omega_i] \\ = \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) | \omega'_i] d\omega'_i + y_i^*(0)$$

が成り立つが、これは (6) を意味する。

Q.E.D.

支払同値定理は、配分ルール g およびタイプ $\omega_i = 0$ の期待利得 $y_i^*(0)$ を所与とすれば、任意のタイプ ω_i について期待支払額 $E[x_i(\omega) | \omega_i]$ が一意に定まることを意味する。よって、期待支払額は、支払ルールの特定制の詳細から独立に定まる。異なる直接メカニズムであっても、配分ルールとタイプ $\omega_i = 0$ の期待利得が共通であれば、期待支払額は常に一致することになる。

定理 6 – 4 (収入同値定理): 任意の BIC をみたす直接メカニズム (g, x) において、期待収入は

$$E[\sum_{i \in N} x_i(\omega)] = E[\sum_{i \in N} v_i(g(\omega), \omega)]$$

$$-\sum_{i \in N} E_{\omega_i} \left[\int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) | \omega'_i] d\omega'_i \right] - y_i^*(0)$$

である。ここで、 $E[\cdot]$ は状態 ω についての期待値、 $E_{\omega_i}[\cdot]$ はタイプ ω_i についての期待値を意味する。

証明：支払同値定理における等式（6）、および

$$E\left[\sum_{i \in N} x_i(\omega)\right] = \sum_{i \in N} E_{\omega_i}[E[x_i(\omega) | \omega_i]]$$

より、収入同値定理の証明は自明である。

Q.E.D.

収入同値定理は、配分ルール g および各プレーヤー i のタイプ $\omega_i = 0$ における期待利得 $y_i^*(0)$ を所与とすれば、期待収入 $E\left[\sum_{i \in N} x_i(\omega)\right]$ が一意に定まることを意味する。よって、期待収入は、支払ルールの特定制の詳細から独立に定まる。異なる直接メカニズムであっても、配分ルールとタイプ $\omega_i = 0$ の期待利得が共通であれば、期待収入は一致することになる。

5. 利得同値定理の証明

利得同値定理の証明の軸になる数学的性質は、「包絡線定理 (Envelope Theorem)」である。

定理 6 – 5 (包絡線定理)：ある関数 $\rho : [0,1] \rightarrow R$ が存在して、

$$(7) \quad y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} \rho(b) db + y_i^*(0) \quad \text{for all } \omega_i \in [0,1]$$

がみたされる、つまり、 $y_i^*(\omega_i)$ が絶対連続であるならば、タイプ ω_i のほぼいたるところで、

$$(8) \quad \rho(\omega_i) = y_{i2}(\omega_i, \omega_i), \text{ すなわち } \frac{dy_i^*(\omega_i)}{d\omega_i} = y_{i2}(\omega_i, \omega_i)$$

が成り立つ。ここで、 $y_{i2}(\omega'_i, \omega_i) \equiv \frac{\partial y_i(\omega'_i, \omega_i)}{\partial \omega_i}$ と定義する。

証明：まず、

$$\rho(\omega_i) = \frac{dy_i^*(\omega_i)}{d\omega_i} = \frac{dy_i(\omega_i, \omega_i)}{d\omega_i} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{y_i(\omega_i, \omega_i) - y_i(\omega_i - \Delta, \omega_i - \Delta)}{\Delta}$$

であることに気付かれよ。B I Cの条件式 (5) から、

$$y_i(\omega_i - \Delta, \omega_i - \Delta) \geq y_i(\omega_i, \omega_i - \Delta)$$

でなければならないので、上の等式に代入して、

$$(9) \quad \rho(\omega_i) \leq \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{y_i(\omega_i, \omega_i) - y_i(\omega_i, \omega_i - \Delta)}{\Delta} = y_{i2}(\omega_i, \omega_i)$$

が成り立つ。同様に、

$$\begin{aligned} \rho(\omega_i + \Delta) &= \frac{dy_i^*(\omega_i + \Delta)}{d\omega_i} = \frac{dy_i(\omega_i + \Delta, \omega_i + \Delta)}{d\omega_i} \\ &= \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{y_i(\omega_i + \Delta, \omega_i + \Delta) - y_i(\omega_i, \omega_i)}{\Delta} \end{aligned}$$

であり、また、B I Cの条件式 (5) から、

$$y_i(\omega_i + \Delta, \omega_i + \Delta) \geq y_i(\omega_i, \omega_i + \Delta)$$

でなければならないので、

$$(10) \quad \lim_{\Delta \downarrow 0} \rho(\omega_i + \Delta) \geq \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{y_i(\omega_i, \omega_i + \Delta) - y_i(\omega_i, \omega_i)}{\Delta} = y_{i2}(\omega_i, \omega_i)$$

が成り立つ。(9) と (10) から、 $\rho(\omega_i) = y_{i2}(\omega_i, \omega_i)$ が成立するので、包絡線定理が証明された。

Q.E.D.

分布独立性の仮定より、 $E[x_i(\omega'_i, \omega_{-i}) | \omega_i]$ は ω_i から独立である。よって、

$$y_i(\omega'_i, \omega_i) \equiv E[v_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega_i, \omega_{-i}) | \omega_i] - E[x_i(\omega'_i, \omega_{-i}) | \omega_i]$$

を ω_i について偏微分し、 $\omega_i = \omega'_i$ とすると、

$$y_{i2}(\omega'_i, \omega'_i) = E[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) | \omega'_i]$$

が得られる。よって、包絡線定理における (7) および (8) より、

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i})] d\omega'_i + y_i^*(0)$$

が得られるので、利得同値定理が証明されたことになる。

6. 単一種一単位の財取引：再考

前回解説された二位価格入札は、直接メカニズムになっており、優位戦略誘因整合性をみたしており、しかも効率的配分を達成している。では、二位価格入札以外のメカニズムを使って、しかも優位戦略より弱い均衡概念であるベイジアン・ナッシュ均衡によって、効率的配分の達成可能性を再度検討した場合、売り手は二位価格入札よりも高い期待収入を獲得できるだろうか。

表明原理、収入同値定理を使えば、この問いに簡単に答えることができる。二位価格入札においては、タイプ $\omega_i = 0$ における期待利得はゼロである ($y_i^*(0) = 0$)。もしタイプ $\omega_i = 0$ における期待利得がゼロ未満であれば、タイプに応じては、入札者は入札に参加するインセンティブを失うため、効率的配分が達成できなくなる。よって、タイプ $\omega_i = 0$ における期待利得がゼロないしはゼロ以上であるとする制約下で、ベイジアン・ナッシュ均衡によって、二位価格入札よりも高い期待収入をもたらす、かつ効率的配分を達成させるメカニズムが存在するかどうかを検討すればよい。しかしながら、表明原理および収入同値定理によれば、そのようなメカニズムは存在せず、タイプ $\omega_i = 0$ の入札者の期待利得がゼロ以上である限り、二位価格入札よりも高い期待収入をもたらすメカニズムは存在しえない。

もし売り手が二位価格入札よりも高い期待収入を望むのならば、効率的配分の達成をあきらめて、売れ残りを意図的に生じさせるような、非効率的な配分ルールを達成しようと目論むことになるだろう。今後の連載において、売り手

が、効率性でなく、期待収入を最大にすることを目的にオークションルールを設計するケースが解説される予定である。

7. 離散のタイプ集合

同値定理は、タイプ集合が離散である場合には成立しない。例として、二人の入札者 1, 2 による単一種一単位の財取引を考えよう。売り手は、入札者 2 のタイプが $\omega_2 = 1/2$ であることを熟知しているとする。しかし、入札者 1 のタイプは知らない。配分ルールは効率的であるとし、入札者 1 が表明したタイプが $1/2$ 以上の場合には入札者 1 に、 $1/2$ 未満の場合には入札者 2 に、財が配分されるとしよう。

入札者 1 は、タイプを ω_1 と表明した場合、 $x_1(\omega_1) \in R$ を支払う。この時、入札者 1 が、区間 $[0,1]$ 内の任意のタイプにおいて、常に正直に表明するインセンティブをもつための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \omega_1 - x_1(\omega_1) &\geq \omega_1 - x_1(\omega'_1) && \text{if } \omega_1 \geq 1/2 \text{ and } \omega'_1 \geq 1/2, \\ \omega_1 - x_1(\omega_1) &\geq -x_1(\omega'_1) && \text{if } \omega_1 \geq 1/2 \text{ and } \omega'_1 < 1/2, \\ -x_1(\omega_1) &\geq \omega_1 - x_1(\omega'_1) && \text{if } \omega_1 < 1/2 \text{ and } \omega'_1 \geq 1/2, \\ -x_1(\omega_1) &\geq -x_1(\omega'_1) && \text{if } \omega_1 < 1/2 \text{ and } \omega'_1 < 1/2 \end{aligned}$$

である。 $x_1(0) = 0$ を仮定すると、これらの不等式群をみたす支払ルールは一意に定まり、

$$\begin{aligned} x_1(\omega_1) &= 0 && \text{if } \omega_1 < 1/2 \\ x_1(\omega_1) &= 1/2 && \text{if } \omega_1 \geq 1/2 \end{aligned}$$

である。ここで、等式 $x_1(\omega_1) = \frac{1}{2}$ は、タイプが $\omega_1 = \frac{1}{2}$ である場合に財の獲得と非獲得（利得ゼロ）が無差別になること、つまり $\frac{1}{2} - x_1(\frac{1}{2}) = 0$ 、から導かれている。

一方、タイプ集合が離散である場合には、支払ルールは一意に定まらない。例えば、入札者1のタイプは0か1であり、売り手がこのことをわかっているとしよう。この場合、 $\omega_1 = \frac{1}{2}$ のような、0と1の中間のタイプにおけるインセンティブを考慮する必要はなくなる。そのため、支払ルールに求められるインセンティブの制約条件は弱められ、

$$1 - x_1(1) \geq 0 \text{ および } -x_1(0) \geq -x_1(1)$$

だけで十分になる。したがって、 $x_1(0) = 0$ および

$$0 \leq x_1(1) \leq 1$$

をみたす支払ルールであれば、入札者1は正直にタイプを表明することになる。 $x_1(1) = 0$ とするか、 $x_1(1) = 1$ とするか、あるいは0と1の中間の値にするかによって、期待収入は大いに異なる。同値定理はもはや成り立たない。

もっとも、タイプ集合が離散であっても、売り手が入札者1について0と1の中間に多くのタイプの可能性があると予想しているならば、考慮すべきインセンティブの制約条件は十分に強められるので、同値定理は近似的に正しいと考えてよい。

8. 次回の予告

今回は、オークション理論の基本定理である、表明原理と同値定理を解説した。応用として、単一種一単位の財取引において、効率的配分を達成させるメカニズムは、たかだか二位価格入札と実質的に同程度の期待利得、期待支払額、期待収入をもたらすことを示した。

今回は、一般的な配分問題について、効率的配分を達成させるメカニズムデザインの仕方を検討する。効率的配分を達成させる代表的なルールとされる「グロブス・メカニズム」を詳しく解説し、その応用を紹介する予定である。

参考文献

- Krishna, V. (2009): *Auction Theory*, Academic Press.
- Milgrom, P. (2004): *Putting Auction Theory to Work*, Cambridge University Press.
- Myerson, R. (1981): "Optimal Auction Design," *Mathematics of Operations Research* 6, 58-73.
- Riley, J. and W. Samuelson (1981): "Optimal Auctions," *American Economic Review* 71, 381-392.