

2021年10月4日(仮)

# 第1部：不完備情報の静学ゲーム

# 第 1 章：不完備情報の静学ゲーム

**Tadelis Chapter 12**

松島第 4 回

静学ゲーム vs 動学ゲーム  
完備情報 vs 不完備情報

「ゲーム理論」おさらい

## 完備情報 (Complete Information)

仮定：プレイヤーは「ゲームのルール」を知っている (Common Knowledge)

標準形ゲーム (Normal form game, 三種の神器)

$$G \equiv (N, M, u) = (N, (M_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

プレイヤー集合  $N$  行動 (戦略) 集合  $M_i$  利得関数  $u_i$

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

Set of Players

$$i \in N$$

$$M_i$$

Set of Actions for Player  $i$

$$m_i \in M_i$$

$$M = \times_{i \in N} M_i$$

Set of Action Profiles

$$m = (m_i)_{i \in N} \in M$$

$$u_i : M \rightarrow R$$

Payoff Function for Player  $i$

$$u_i(m) \in R$$

$$u = (u_i)_{i \in N}$$

Profile of Payoff Functions

## 本講義のメインテーマ

### 不完備情報 (**Incomplete Information**)

プレイヤーは「社会の状態 (**State of the World**) 」がどれかわからない

∴ プレイヤーは「ゲームのルール」がどれかわからない

## 1.1. 不完備情報の静学ゲーム：定義

State Space  $\Omega$



State  $\omega \in \Omega$  occurs.



状態  $\omega$  における標準形ゲーム。

$$G = G(\omega) \equiv (N, M, (u_i(\cdot, \omega))_{i \in N})$$

$$u_i(m, \omega)$$

player  $i$ 's payoff at state  $\omega \in \Omega$   
which is induced by action profile  $m \in M$

各プレイヤーはどのゲーム ( $G(\omega)$ ) がプレイされるのかわからない

ゲームの束  $(G(\omega))_{\omega \in \Omega}$

どの state  $\omega$  が現実におきているのかよく知らない

(ただしプレイヤー集合  $N$ 、行動集合  $M_i$  は知っていると仮定)

## 情報の非対称性 (Asymmetric Information)

プレイヤー  $i$  は真の社会状態  $\omega$  について  
私的情報 (プレイヤー  $i$  の「タイプ」)  $\omega_i$  を  
 $\omega$  についての部分的な情報として  
知っているとする

**Player  $i$ 's Type (Private Information)**

$$\omega_i \in \Omega_i$$

$$\Omega \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$

$$\omega = (\omega_i)_{i \in N} \in \Omega$$

## Private Values (私的価値)

$u_i(m, \omega)$  は  $\omega_i$  にのみ依存する。

$$u_i(m, \omega) = u_i(m, \omega_i)$$

私は、自分の利得関数のことはわかっている。

しかし他人の利得関数については知らない。

例：「売りに出された財の品質についてはわかっている。

しかしほしいかどうかは人それぞれだ」

選好についての情報非対称性：ミクロ経済学を思い出せ

## Interdependent Values

$u_i(m, \omega)$  は  $\omega_{-i}$  にも依存する。

私は、自分の利得関数についても、他人の利得関数についても、部分的にしかわかっていない。

例：「売りに出された財の品質について部分的にしか知らない。が、みんなの情報をまとめれば（かなり）正しい品質情報になる。」

油田採掘権

品質についての情報の非対称性：アカロフの「レモン」



## 不完備情報の静学ゲーム $\Gamma$ : 定義

ゲームの束 + 私的情報

$$\Gamma \equiv (N, M, (\Omega_i)_{i \in N}, \Omega, ((u_i(\cdot, \omega))_{\omega \in \Omega})_{i \in N})$$

Set of Players

$N$

Action Set

$M_i$

Type Space

$\Omega_i, \omega_i \in \Omega_i$

State Space

$\Omega \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$

Payoff Function

$(u_i(\cdot, \omega))_{\omega \in \Omega}$

**Player  $i$ 's Strategy  $s_i \in S_i$  in  $\Gamma$**

$$s_i : \Omega_i \rightarrow M_i$$

戦略とは？

行動選択のプランのこと！

「私のタイプが  $\omega_i$ 」ならば 「 $s_i(\omega_i) \in M_i$  を選択する」

行動選択の仕方は自身のタイプ  $\omega_i$  にのみ依存しうる  
( $\omega_{-i}$  のことはわからないから)

**Strategy Profile**

$$s = (s_i)_{i \in N} \in \mathcal{S} = \prod_{i \in N} S_i$$

## 1.2. 不完備情報の静学ゲームにおける均衡概念

不完備情報においてプレイヤーはどのように行動するのか

3つの代表的な均衡概念

優位戦略 (**Dominant Strategy**)

事後均衡 (情報非対称性下のナッシュ均衡)

ベイジアン・ナッシュ均衡 (次章にて解説)

## 1.2.1. Dominant Strategy

「ゲーム理論」のおさらい

完備情報ゲームにおける **Dominant Strategy**

A strategy  $m_i \in M_i$  is said to be dominant for player  $i$  in  $G = (N, M, u)$  if

for every  $m'_i \in M_i \setminus \{m_i\}$ ,

$u_i(m_i, m_{-i}) \geq u_i(m'_i, m_{-i})$  for all  $m_{-i} \in M_{-i}$ ,

where the strict inequality holds for some  $m_{-i} \in M_{-i}$ .

## 不完備情報ゲームにおける **Dominant Strategy**

A strategy  $s_i \in S_i$  is said to be **dominant** for player  $i \in N$  in  $\Gamma$  if

for every  $\omega \in \Omega$  and  $m'_i \in M_i \setminus \{s_i(\omega_i)\}$ ,

$$u_i((s_i(\omega_i), m_{-i}), \omega) \geq u_i((m'_i, m_{-i}), \omega) \text{ for all } m_{-i} \in M_{-i},$$

where the strict inequality holds for some  $m_{-i} \in M_{-i}$ .

タイプ  $\omega_i$  のプレイヤー  $i$  にとって、行動  $s_i(\omega_i) \in M_i$  を選択することは相手のタイプ  $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$ 、相手の行動選択  $m_{-i} \in M_{-i}$  に関係なく最適である。

優位戦略は  
インセンティブについてもっとも強い要求を課している  
合理的均衡概念である

そのため  
優位戦略が存在するゲームは稀である  
(が、存在する重要なケースもある)

## 優位戦略が存在するケースの代表例 二位価格入札 (Second Price Auction)

財を欲しがっている人が複数いる

財を一番欲しがっている人に配分したい：効率的配分

私的価値 (Private Values, 選好について情報非対称性) を仮定

誰が一番欲しがっているかわからない

## 入札制度とは：

各入札者から財に対する選好情報を聞き出して  
それを効率的配分（一番欲しがっている人）の割り出しに結びつける  
制度的しくみのこと

## 二位価格入札は

入札制度のさまざまなしくみの中でも  
特に優れたパフォーマンスが期待できる  
合理的なルールのひとつと考えられている



## 二位価格入札のルール

財（一単位、非分割）に対して、各入札者（各プレイヤー）は同時に封印入札する  
 最高指値をした入札者に財が落札される  
 落札者は二番目に高い指値（二位価格）を払う：自分の指値を払うのでないので注意！

$$M_i = [0, \infty)$$

$$\omega_i \in \Omega_i = [0, 1]$$

$$u_i(m, \omega) = 0$$

$$u_i(m, \omega) = \omega_i - \max_{j \neq i} m_j$$

Bidder  $i$  makes a bid  $m_i \in M_i$

タイプ  $\omega_i$  の財評価額は  $\omega_i$ （万円）である

if bidder  $i$  is a **loser**, i.e., either

$m_j > m_i$  for some  $j \neq i$ , or

$m_j = m_i$  for some  $j < i$ .

if bidder  $i$  is the **winner**, i.e.,

$m_i \geq m_j$  for all  $j \neq i$ , and

$m_i > m_j$  for all  $j < i$ .

正直戦略 (Honest Strategy)  $s_i^* \in S_i$   
自身の評価額を正直に指値表明する戦略のこと :

$$s_i^*(\omega_i) = \omega_i \text{ for all } \omega \in \Omega$$

二位価格入札では  
入札者は正直に指値表明をする強いインセンティブをもつ。  
つまり

正直戦略は優位戦略になっている！

一番欲しがっている人が一番高い指値をすることになる  
∴ 効率的配分が達成！

**Theorem 1-1 :** In the second price auction, the honest strategy  $s_i^*$  is a dominant strategy for each player  $i \in N$ .

**Proof (outline):** Fix an arbitrary  $\omega \in \Omega$  and an arbitrary  $m \in M$ . Note

$$u_i(m, \omega) \leq \max[0, \omega_i - \max_{j \in N \setminus \{i\}} m_j].$$

Suppose that bidder  $i$  makes the honest bid  $s_i^*(\omega_i) = \omega_i$  instead of  $m_i$ .

**Case 1:**  $i$  is the winner. Since  $\omega_i \geq \max_{j \in N \setminus \{i\}} m_j$ , we have

$$u_i((\omega_i, m_{-i}), \omega) = \omega_i - \max_{j \in N \setminus \{i\}} m_j \geq 0$$

**Case 2:**  $i$  is a loser. Since  $\omega_i \leq \max_{j \in N \setminus \{i\}} m_j$ , we have

$$u_i((\omega_i, m_{-i}), \omega) = 0 \geq \omega_i - \max_{j \in N \setminus \{i\}} m_j.$$

Hence, we can conclude:

$$u_i((\omega_i, m_{-i}), \omega) = \max[0, \omega_i - \max_{j \in N \setminus \{i\}} m_j] \geq u_i(m, \omega).$$

**Q.E.D.**

## 1.2.2. Ex Post Equilibrium (事後均衡)

社会状態  $\omega \in \Omega$  ごとに  
 完備情報下の静学ゲーム  $G(\omega) = (N, M, u(\cdot, \omega))$  のナッシュ均衡を考えよう。

不完備情報であるため  
 各プレイヤーの均衡プレイは自身のタイプのみ依存するものでないといけない

**A strategy profile  $s \in S$  is said to be an ex post Equilibrium (事後均衡) if**

**for every  $\omega = (\omega_i, \omega_{-i}) \in \Omega$ ,**  
 **$s(\omega) = (s_j(\omega_j))_{j \in N} \in M$  is a Nash equilibrium in  $G(\omega)$ ,**  
**that is,**

**for every  $i \in N$  and  $m_i \in M_i$ ,**  
 **$u_i(s(\omega), \omega) \geq u_i((m_i, (s_j(\omega_j))_{j \in N \setminus \{i\}}), \omega)$**

**[Ex post equilibrium]**



**[Nash equilibrium, and  
each player's strategy depends only on his type]**

**[Dominant strategy profile]**



**[Ex post equilibrium]**

宿題（1）を提出すること。

**ITC-LMS** にてダウンロードおよび提出（1週間以内）。