

2021年10月7日(仮)

## 第2章：ベイジアンゲーム (Bayesian Game)

均衡概念：均衡が一般的に**存在**することが望まれる。しかし…

優位戦略： 存在するとは限らない

事後均衡： ナッシュ均衡の特殊ケース

ナッシュ均衡自体は一般的に存在 **OK**。しかし

非対称情報制約 (タイプ  $\omega_i$  にのみ依存) のため

事後均衡は存在するとは限らない

完備情報下で一般的に存在する均衡概念： ナッシュ均衡

不完備情報下で一般的に存在する均衡概念： **ベイジアン・ナッシュ均衡**

**Bayesian Nash Equilibrium (BNE)** の定義のためには：

不完備情報の静学ゲームに

**Belief System**

(不確実性に対するプレイヤーの予想の仕方) を追加して

「**ベイジアンゲーム (Bayesian Game)**」

を定義する必要がある

## 2. 1. Belief System

不確実性（不完備情報）： どの State  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$  が現実におきているのか？

自身のタイプ  $\omega_i$  はわかっている。しかし  
他のプレイヤーのタイプ  $\omega_{-i} = (\omega_j)_{j \neq i} \in \Omega_{-i}$  はわからない

そこで各プレイヤー  $i \in N$  は、  
他のプレイヤーのタイプ・プロファイル  $\omega_{-i}$  はどれかについて  
「確率的に」査定する：

**Belief**  $p_i = (p_i(\cdot | \omega_i))_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}}$

Player  $i$ 's Belief on the other players' types  $p_i = (p_i(\cdot | \omega_i))_{\omega_i \in \Omega_i}$

$$p_i(\cdot | \omega_i) : \Omega_{-i} \rightarrow [0, \infty),$$

$$\text{where } \sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} p_i(\omega_{-i} | \omega_i) = 1$$

タイプ  $\omega_i$  のプレイヤー  $i$  は  
他のプレイヤーのタイプ・プロファイルが  $\omega_{-i}$  である確率が

$$p_i(\omega_{-i} | \omega_i)$$

であると予想する

## Belief System $p = (p_i)_{i \in N}$ の様々な分類

### Common Prior beliefs (共通事前分布) :

**Common prior (事前確率)  $p : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  :**

何も情報持たなければ全プレイヤーは State  $\omega$  について同じ確率予想をする

しかし私的情報 (タイプ) をもつと異なる事後確率 (Posterior) になる :

$$p_i(\omega_{-i} | \omega_i) = \frac{p(\omega_i, \omega_{-i})}{\sum_{\omega'_{-i} \in \Omega_{-i}} p(\omega_i, \omega'_{-i})}$$

### Heterogeneous Beliefs :

**No common prior exists**

何も情報を持たなくても  $\omega$  についてお互いに異なる確率予想をする

## Independent Types (分布独立性) :

Belief  $p_i(\cdot | \omega_i)$  はタイプ  $\omega_i$  から独立  
 $p_i(\omega_{-i} | \omega_i) = p_i(\omega_{-i})$

## Correlated Types (分布相関性) :

Belief  $p_i(\cdot | \omega_i)$  はタイプ  $\omega_i$  に依存

\*その他 : 対称分布、非対称分布など (後述)

\* よく扱われるケース : **Common Prior + Independent Types**

$$p(\omega) = \prod_{i \in N} p^i(\omega_i)$$

$$p^i(\omega_i) \equiv \sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} p(\omega_i, \omega_{-i}) \quad \text{タイプ } \omega_i \text{ の分布}$$

(superscript に注意)

\* **Belief System** の記述例 :

離散空間のタイプ集合 :

$$\Omega_i = \{0, 1, 2, \dots\}$$

確率分布

$$P^i(\omega_i) = \sum_{b=0}^{\omega_i} p^i(b)$$

(大文字に注意)

連続空間のタイプ集合 :

$$\Omega_i = [0, \infty)$$

確率密度

$$p^i(\omega_i) \in [0, \infty)$$

確率分布

$$P^i(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} p^i(b) db$$

(大文字に注意)



## 2.2. ベイジアンゲーム：定義

不完備情報の静学ゲーム  $\Gamma$  に  
信念 (belief) システム  $p$  を追加して.....

### Bayesian Game: Definition

**Incomplete Information Game + Belief System**  $p = (p_i)_{i \in N}$

$$(\Gamma, p) \equiv ((N, M, (\Omega_i)_{i \in N}, \Omega, (u_i(\cdot, \omega))_{\omega \in \Omega})_{i \in N}), p)$$

## 期待効用（私的情報の条件付き）

**Player  $i$ 's expected payoff**  
when type is  $\omega_i$  and strategy profile  $s \in S$  is played  
in Bayesian game  $(\Gamma, p)$ :

$$E[u_i(s(\omega), \omega) | \omega_i] \equiv \sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} u_i(s(\omega), \omega) p_i(\omega_{-i} | \omega_i)$$

## 最適反応

各プレイヤーは自身の私的情報をもとに期待利得を最大化

**Player  $i$ 's strategy  $s_i \in \mathcal{S}_i$  is said to be a Best Response to  $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$  in Bayesian game  $(\Gamma, p)$  if**

**for every  $\omega_i \in \Omega_i$  and  $m_i \in M_i$**

$$E[u_i(s(\omega), \omega) | \omega_i] \geq E[u_i((m_i, s_{-i}(\omega_{-i})), \omega) | \omega_i]$$

**where  $s(\omega) = (s_i(\omega_i))_{i \in N} \in M$ .**

$E[u_i(s(\omega), \omega) | \omega_i]$ は

プレイヤーがタイプ  $\omega_i$  である場合の  
戦略プロファイル  $s$  がもたらす期待利得

## 2. 3. Bayesian Nash Equilibrium (BNE)

A strategy profile  $s^* \in S$  is said to be **Bayesian Nash Equilibrium in Bayesian game**  $(\Gamma, p)$  if

each player  $i$ 's strategy  $s_i^* \in S_i$  is a best response to  $s_{-i}^* \in S_{-i}$ , i.e.,

for every  $i \in N$ ,  $\omega_i \in \Omega_i$ , and  $m_i \in M_i$ ,

$$E[u_i(s^*(\omega), \omega) | \omega_i] \geq E[u_i((m_i, s_{-i}^*(\omega_{-i})), \omega) | \omega_i]$$

どの戦略プロファイルが **BNE** になるかは  
不完備情報ゲーム  $\Gamma$  のみならず **Belief System**  $p$  にも依存

**Belief system** をどう特定化するかに関係なく **BNE** ならば  
それは事後均衡になる：

[Strategy profile  $s$  is an ex post equilibrium]



[Strategy profile  $s$  is a Bayesian Nash equilibrium  
irrespective of belief system  $p$ ]

## \* Bayesian Nash Equilibrium と Nash Equilibrium の関係

ベイジアンゲームを

完備情報の静学ゲーム（標準形ゲーム）に見立ててみよう：

各プレイヤーの各タイプ  $\omega_i$  を「独立のプレイヤー（Agent）」と捉えると .....

### Agent-Normal Form Game ( $H, A, w$ )

プレイヤー集合

$$H \equiv \bigcup_{i \in N} \Omega_i, \omega_i \in H$$

行動集合

$$A \equiv \times_{h \in H} A_h, A_{\omega_i} = M_i, a = (a_h)_{h \in H} \in A$$

利得関数プロファイル

$$w = (w_h)_{h \in H}$$

$$w_{\omega_i}(a) = E[u_i(s(\omega), \omega) | \omega_i],$$

where we write

$$s_i(\omega_i) = a_{\omega_i} \text{ for all } i \in N \text{ and } \omega_i \in \Omega_i.$$

ベイジアンゲームにおけるBNEは  
Agent-Normal Form Game におけるNE と同値である :

[ $s$  is a Bayesian Nash equilibrium in Bayesian game  $(\Gamma, p)$ ]



[ $a$  is a Nash equilibrium in associated agent-normal form game  $(H, A, w)$ ,  
where  $s_i(\omega_i) = a_{\omega_i}$  for all  $i \in N$  and  $\omega_i \in \Omega_i$ ]

BNEは一般的に存在するといえる

- ∴ **Agent-normal form game** におけるナッシュ均衡が一般的に存在するため

「ベイジアンゲームおよびBNE」は  
不完備情報の問題に対して  
完備情報の問題と同じ分析方法を使えるようにする  
すぐれた工夫である

(続く)