2021 年 10 月 14 日（仮）

第 3 章：メカニズムデザイン

Tadelis Chapter 12

松島第 4 回および第６回の一部

メカニズムデザイン

ゲーム理論の応用分野
(制度の経済学、制度の社会科学)

財・サービス、資源を有効利用する
良い「配分（**Allocation**）」を達成したい

そのための制度作りの科学

さまざまな社会的決定（議員選出、裁判判決）を含む、非常に広義の意味あい

3. 1. 配分問題（Allocation Problem）

Set of Possible Allocations（配分集合） A, $a \in A$

配分問題： 配分集合 A から配分 a を決定する社会（経済）問題

配分集合の例：私的財の配分

Single-unit: $A = N \bigcup \{0\}$, $i \in A$ **implies winner's name.**
0 implies "no winner".

Multi-Unit: **Total supply** Q

$$a = (a_1, ..., a_n) \in A, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \leq Q, \ a_i \geq 0$$

$$\therefore \quad A \equiv \{a = (a_1, ..., a_n) \in \mathrm{N}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \leq Q, a_i \geq 0\}$$

Multi-Item: **Set of Items (commodities)** B

$a = (a_1, ..., a_n) \in A$

$a_i \subset B$: **Package of commodities**

$a_i \bigcap a_j = \phi$ **for** $i \neq j$

$$\therefore \quad A \equiv \{a = (a_1, ..., a_n) \mid a_i \subset B, a_i \bigcap a_j = \phi \ for \ i \neq j\}$$

配分の際に各プレーヤーは対価を請求される

Side Payments Vector: $t = (t_i)_{i \in N} \in R^n$

Agent i pays money $t_i \in R$.

To whom?: To
- Central Planner (CP)
- Government
- Sellers
- Mediator
- Other players
- …

完備情報下の
"Utility Function"

$$U_i : A \times R \to R$$

配分 $a \in A$ が決定され、金銭 $t_i \in R$ を支払うと
プレーヤーiの効用（利得）は $U_i(a, t_i)$

$U_i(a, t_i)$ **is decreasing in side-payment** t_i.

＊ $U_i(a,t_i)$ と $u_i(m)$ の意味内容の違いに注意せよ

$u_i(m)$ は戦略プロファイル m に対する利得　（ゲームの利得）

$U_i(a,t_i)$ は配分 a に対する利得　（配分問題の利得）

完備情報下の配分問題：定義

$$(N, A, (U_i)_{i \in N})$$

配分 $a \in A$ および支払い $t_i \in R$ に対する効用は

$$U_i(a, t_i)$$

ゲームのルールと配分問題の違いに注意せよ

不完備情報下の
“Utility function”

$$U_i : A \times R \times \Omega \to R$$

社会状態 $\omega \in \Omega$ において

配分 $a \in A$ が決定され、金銭 $t_i \in R$ を支払うと

プレーヤー i の効用（利得）は $U_i(a, t_i, \omega)$

$U_i(a, t_i, \omega)$ **is decreasing in payment** t_i.

不完備情報下の配分問題：定義

$$(N, A, \Omega, (\Omega_i)_{i\in N}, ((U_i(\cdot,\omega))_{i\in N})_{\omega\in\Omega})$$

状態 $\omega \in \Omega$ における、配分 $a \in A$ および支払い t_i に対する効用は

$$U_i(a, t_i, \omega)$$

Assumptions on $U_i : A \times R \times \Omega \to R$

Quasi-Linearity（準線形性）：所得効果ゼロ（部分均衡分析）

$$U_i(a,t_i,\omega) = W_i(v_i(a,\omega) - t_i,\omega)$$

$v_i(a,\omega)$ **implies valuation function: Reservation Value for allocation** a ：

配分 a の効用を金銭で評価したもの

(Independent of t_i)

$$W_i : R \times \Omega \to R$$

$W_i(y,\omega)$ **is increasing in** y

Additional Assumption: $W_i(y,\omega)$ **is independent of state** ω

$$W_i(y) \equiv W_i(y,\omega)$$

Risk Neutrality（リスク中立性）：

$$U_i(a,t_i,\omega) = v_i(a,\omega) - t_i$$

Properties of Valuation Function（再確認）

Private Values： $v_i(a,\omega) = v_i(a,\omega_i)$

Interdependent Values： $v_i(a,\omega)$

品質についての情報非対称性

3. 2. Mechanism（メカニズム）

配分はどうやって社会的に決定されるのか？：

制度（メカニズム）を通じて決定される
メカニズムを通じて偏在する情報を集め、決定に役立てる

メカニズムとは？：

配分および支払い決定の「手続き」
分権的決定メカニズム（市場、制度、ルール、契約……）
私的情報を開示する「インセンティブ」をどのように提供するかがカギ

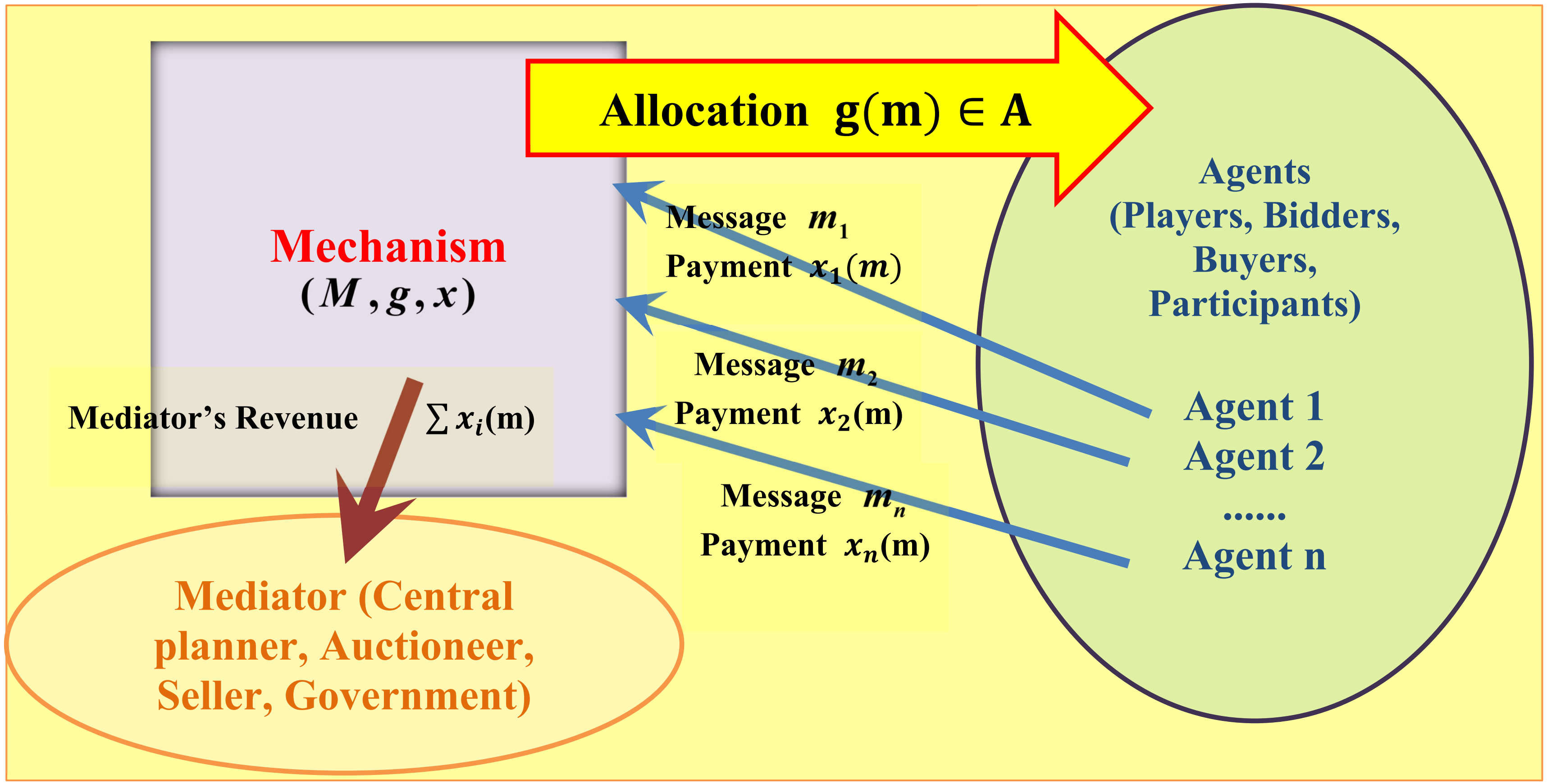
Mechanism

$$(M, g, x)$$

- M_i — **Set of messages (actions, bids) for player i**
- $M = \times_{i \in N} M_i$ — **Set of message (action) profiles**
- $g : M \to A$ — **Allocation Rule**
- $x = (x_i)_{i \in N}, \; x_i : M \to R$ — **Payment Rule**

[Players announce independently and simultaneously a message profile $m = (m_i)_{i \in N} \in M$]

$\Rightarrow$ **[Determination of Allocation $g(m) \in A$ and Payments $x_i(m) \in R$]**


Allocation g(m) ∈ A
Mechanism
(M, g, x)
Mediator's Revenue
∑ x_i(m)
Message m_1
Payment x_1(m)
Message m_2
Payment x_2(m)
Message m_n
Payment x_n(m)
Agents
(Players, Bidders,
Buyers,
Participants)
Agent 1
Agent 2
......
Agent n
Mediator (Central
planner, Auctioneer,
Seller, Government)

「配分問題＋メカニズム」と「不完備情報下の静学ゲーム」との関係

配分問題をゲーム理論で分析する：

Incomplete Information Game Associated with $(U_i)_{i \in N}$ and (M, g, x)

$$\Gamma = (N,\ M,\ (\Omega_i)_{i \in N}, \Omega, (u_i(\cdot, \omega))_{\omega \in \Omega})_{i \in N})$$

where we assume

$$u_i(m, \omega) \equiv U_i(g(m), x_i(m), \omega)$$

Players selects message (action) profile $m \in M$

$\Rightarrow$ **Mechanism (M, g, x) determines**

allocation $g(m) \in A$ and side payment vector $x(m) \in R^n$

$\Rightarrow$ **Player i obtains payoff $U_i(g(m), x_i(m), \omega) = u_i(m, \omega)$**

3. 3. メカニズムデザイン

経済学（あるいは社会科学）の根本にある二つの分析視点

・実証的（事実解明的、**Descriptive, Positive**）：

メカニズム (M,g,x) をモデル化し分析する
配分が実際にどのように決定されているか

・規範的（**Normative**）：

各社会状態においてどの配分が望ましいか（達成されるべきか）
社会的選択ルール（**Social Choice Function、SCF**）
$f:\Omega\to A$
「各 $\omega\in\Omega$ において配分 $f(\omega)\in A$ が望ましい」
望ましい配分をどのように達成できるか（**a la Mechanism Design**）

効率的配分

（望ましい配分の考え方の代表例）

Quasi-Linearity（準線形）の仮定下で …

総余剰（利得の和）最大化：

$$\max_{a \in A} \sum_{i \in N} v_i(a, \omega)$$

効率的な社会的選択ルール f ：**For each state** $\omega \in \Omega$,

$$\sum_{i \in N} v_i(f(\omega), \omega) \geq \sum_{i \in N} v_i(a, \omega) \quad \textbf{for all} \quad a \in A$$

メカニズムデザインの目的：

「ことなるゲームを比較」⇔「背景にあることなる制度を比較」

- 任意のメカニズムはどの社会的選択ルールを実現させるか？
- 任意の社会的選択ルールを実現（履行、遂行）させるメカニズムはどれか？
- どちらのメカニズムがより望ましいか？
（より効率的か？収入はどっちがいいか？）

これらの問いを検討するために
メカニズムがもたらす不完備情報ゲームを均衡分析

Implementation Problem（履行問題、遂行問題）

メカニズムデザインの代表的な問題形式

問題形式１： 任意の社会的選択ルール f は遂行可能（**Implementable**）か？

問題形式 **2**： 任意の社会的選択ルール f が遂行可能ならば
どのようなメカニズムがデザインされる必要があるか？

・Mechanism (M, g, x) と Strategy Profile $s \in S$ がみたすべき条件（１）：

$$g(s(\omega)) = f(\omega) \text{ for all } \omega \in \Omega$$

メカニズム (M, g, x) において戦略プロファイル s がプレイされると
社会的選択ルールの配分 $f(\omega)$ が決定される

・Mechanism (M, g, x) と Strategy Profile $s \in S$ がみたすべき条件（２）：
インセンティブ条件：

Partial Implementation:

戦略プロファイル $s \in S$ は均衡か
優位戦略プロファイル？事後均衡？ＢＮＥ？

Unique Implementation:

一意性問題
他に均衡は存在するか？それは同じ社会的選択ルールを履行するか？
Abreu-Matsushima Mechanism

Partial Implementation のみ考察

メカニズムの例：配分集合 $A=N$ （Allocation $i \in A$ implies winner's name）
（ゲームのルールとメカニズムとの違いに注意）

一位価格入札 (M,g,x)

$M_i=[0,\infty)$	Player i makes a bid $m_i \in [0,\infty)$.
$m_{g(m)} \geq m_i$ for all $i \in N$	Winner $g(m) \in A = N$ makes the highest bid.
$x_{g(m)}(m) = m_{g(m)}$	Winner $g(m)$ pays his bid (pay-as-bid).
$x_i(m)=0$ for $i \neq g(m)$	Losers never pay.

二位価格入札 (M,g,x)

$M_i=[0,\infty)$	Player i makes a bid $m_i \in [0,\infty)$.
$m_{g(m)} \geq m_i$ for all $i \in N$	Winner $g(m)$ makes the highest bid.
$x_{g(m)}(m) = \max_{i \neq g(m)} m_i$	Winner $g(m)$ pays losers' highest bid.
$x_i(m)=0$ for $i \neq g(m)$	Losers never pay.

3. 4. 直接メカニズム（Direct Mechanism）と表明原理（Revelation Principle）

Partial Implementation

社会的選択ルール
$f:\Omega \to A$

$g(s(\omega)) = f(\omega)$
for all $\omega \in \Omega$

メカニズム
(M, g, x)
戦略プロファイル
$s \in S$
（何らかの均衡になっている）

他にも別の均衡戦略プロファイルが
あるかもしれないがここでは気にしない
cf. Unique Implementation

Partial Implementation の基本問題

Partial Implementation をみたす社会的選択ルールにはどのようなものがあるか

Partial Implementation をみたす社会的選択ルールの遂行にはどのようなメカニズムがデザインされればいいか。

均衡行動として、どのような戦略プロファイルを考えればいいか

答え：

- **Direct Mechanism**（直接メカニズム）を考えよ。
- 社会的選択ルールをそのまま配分ルール（**Allocation Rule**）に据えよ。
- 正直戦略プロファイル（**Honest Strategy Profile**）が均衡かどうかをチェックせよ。
- 正直戦略プロファイルが均衡になるように支払いルール（**Side Payment rule**）をデザインせよ。

Direct Mechanism (g, x) とは？

各プレーヤーは自身のタイプを表明する：

$$M_i = \Omega_i$$

$$M = \times_{i \in N} \Omega_i$$

$$g : \times_{i \in N} \Omega_i \to A$$

$$x_i : \times_{i \in N} \Omega_i \to R$$

現実の制度のほとんどは

Indirect Mechanism（$M_i \neq \Omega_i$）である

しかし（**Partial Implementation** において）

「表明原理（**Revelation Principle**）」が成立：

「**Indirect Mechanism** によって遂行できる社会的選択ルールは

Direct Mechanism によっても遂行できる」

（続く）