2021 年 10 月 18 日（仮）

第 4 章 VCG メカニズム（続き）

4.1. VCG Mechanism: Definition

Definition: **Direct mechanism (g, x) is said to be a VCG mechanism if the allocation rule g is efficient, i.e. for every $\omega \in \Omega$,**

$$\sum_{i \in N} v_i(g(\omega), \omega_i) \geq \sum_{i \in N} v_i(a, \omega_i) \quad \text{for all } a \in A,$$

and, for every $i \in N$, there exists a function $h_i : \Omega_{-i} \to R$ such that

$$x_i(\omega) = -\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(\omega), \omega_j) + h_i(\omega_{-i})$$

↑この一見わかりにくい支払いルールの意味を理解することが本章の目的

VCG Mechanism の支払いルール x はどんな意味？？

Message profile $m \in M \equiv \Omega$ がアナウンスされると

ＣＰは各プレーヤー i に対して
$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$ 円支払う。

さらにＣＰは各プレーヤー i から
$h_i(m_{-i})$ 円徴収する。

よって、プレーヤー i の私的便益は

$$v_i(g(m), \omega_i) - x_i(m)$$

$$= v_i(g(m), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) - h_i(m_{-i})$$

VCG メカニズムを理解するため、まず特殊ケースとして
「徴収なし」のケースを考えてみよう：$h_i(m_{-i}) \equiv 0$

$$\therefore \quad x_i(m) = -\sum_{j \in N\setminus\{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

各プレーヤー i は「私のタイプは $m_i \in \Omega_i$」とアナウンスする
CP はそれを鵜呑みにするとしよう
「真の状態は $m = (m_i)_{i \in N} \in \times_{i \in N} \Omega_i$ と信じよう。
配分を $g(m)$ としよう。」
CP は社会的便益（総余剰）を $\sum_{j \in N} v_j(g(m), m_j)$ と想定し
各プレーヤー i の私的便益を $v_i(g(m), m_i)$ と想定したことになる

「社会的便益と私的便益は乖離している」
⇒ 「うそをつかれる懸念あり」

そこで、ＣＰは

「内部化（**Internalization**）」を企てる

社会的便益と私的便益は一致してないので
内部化によって一致させよう

VCG の支払いルールの本質は
この「内部化」の仕方にある

＊内部化（既出）：　市場の失敗の代表的な解決方法
矯正税（ピグー税）

VCG の支払いルールの本質は「内部化」にある

CP は各プレーヤー i に

「他のプレーヤーの私的便益の総和」

$$\sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

を支払ってやる

するとＣＰが予想する各プレーヤー i の利得は

$$v_i(g(m), m_i) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

$$= \sum_{j\in N} v_j(g(m), m_j)$$

$$= \max_{a\in A} \sum_{j\in N} v_j(a, m_j)$$

これは「社会状態 $m \in \Omega$ の時の最大化総余剰」に一致

一方、真の社会状態を $\omega \in \Omega$ とすると、
各プレーヤー i の「実際の」便益は $v_i(g(m), m_i)$ でなく
$v_i(g(m), \omega_i)$ である。

各プレーヤー i の「実際の」利得は

$$v_i(g(m), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

これは「社会状態 $(\omega_i, m_{-i}) \in \Omega$ にて配分 $g(m)$ が選ばれた場合の
総余剰」に一致している

配分が $g(m) \in A$ でなく $g(\omega_i, m_{-i}) \in A$ ならば
(つまり m_i の代わりに ω_i をアナウンスするならば)
プレーヤー i の利得は

$$v_i(g(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(\omega_i, m_{-i}), m_j)$$
$$= \max_{a \in A} \{v_i(a, \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, m_j)\}$$
$$\geq v_i(g(m), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

これは「社会状態 (ω_i, m_{-i}) の時の最大化総余剰」に一致！

相手のメッセージ m_{-i} に関係なく正直にタイプ表明するのがベスト
∴ 正直が優位戦略になっている

VCGメカニズム (g, x)：一般形

$$x_i(m) = -\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) + h_i(m_{-i})$$

$h_i(m_{-i})$ はどんな値でもＯＫ

ただし
自身のメッセージ m_i から独立でないとだめ

(独立でない場合には
うそをついて徴収額を低くする可能性があるので正直がベストにならない)

$h_i(m_{-i})$ の追加は CP にとってとても大事：これがないと大赤字

各プレーヤー i に $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$ 支払っているので、トータルで

$$\sum_{i \in N} \{ \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) \} = (n-1) \sum_{j \in N} v_j(g(m), m_j)$$

つまり

総余剰 $\sum_{j \in N} v_j(g(m), m_j)$ の $n-1$ 倍もＣＰは支払っていることになる

∴ 各プレーヤーから $h_i(m_{-i})$ 円徴収しよう！

定理 4-1： 任意の **VCG** メカニズムにおいて、正直戦略は各プレーヤーにとって優位戦略である。つまり、**VCG** メカニズムは **incentive compatibility in dominant strategy (DIC)** をみたす。

証明：任意の $m \in M$ について

$$v_i(g(m),\omega_i) - x_i(m) = v_i(g(m),\omega_i) + \sum_{j \neq i} v_j(g(m),m_j) - h_i(m_{-i})$$

$$\leq \max_{a \in A}\{v_i(a,\omega_i) + \sum_{j \neq i} v_j(a,m_j)\} - h_i(m_{-i})$$

$$= v_i(g(\omega_i,m_{-i}),\omega_i) + \sum_{j \neq i} v_j(g(\omega_i,m_{-i}),m_j) - h_i(m_{-i})。$$

Q.E.D.

4. 2. ピヴォット・メカニズム（Pivot Mechanism）

徴収額 $h_i(m_{-i})$ を大きくすればするほどＣＰは儲かる。
しかし大きくしすぎるとプレーヤーが参加しなくなる恐れがある。

∴　プレーヤーの「参加制約（**Individual Rationality**）」を考慮すべし！

以下、配分問題に参加しない場合の機会費用を「ゼロ」としよう
（ゼロじゃないケースの考察も重要：後述）

参加制約条件（**Participation Constraint, Individual Rationality**）：
A direct mechanism (g, x) satisfies participation constraint if for every $i \in N$,

$$v_i(g(\omega),\omega) - x_i(\omega) \geq 0 \text{ for all } \omega \in \Omega.$$

参加制約をみたす VCG メカニズム：

$$v_i(g(\omega),\omega_j)-x_i(\omega)=\sum_{j\in N}v_j(g(\omega),\omega_j)-h_i(\omega_{-i})\geq 0 \;\text{ for all }\; \omega\in\Omega$$

Pivot Mechanism とは？

参加制約をみたす VCG メカニズムの中で

もっとも CP の収入をたかめるメカニズムのこと：

For every $i\in N$ and $\omega_{-i}\in\Omega_{-i}$,

$$h_i(\omega_{-i})\equiv\min_{\omega_i\in\Omega_i}\sum_{j\in N}v_j(g(\omega),\omega_j)$$

Pivot Mechanism においては、

for every $i\in N$ and $\omega_{-i}\in\Omega_{-i}$,

$$v_i(g(\omega),\omega_j)-x_i(\omega)=\sum_{j\in N}v_j(g(\omega),\omega_j)-h_i(\omega_{-i})\geq 0 \;\text{ for all }\; \omega_i\in\Omega_i,$$

where the equality holds for some $\omega_i\in\Omega_i$.

さらに追加仮定として…

$$v_i(a,\omega_i) \geq 0 \ \text{ for all } \ i \in N, \ a \in A, \text{ and } \ \omega_i \in \Omega_i$$

および

There exists $\bar{\omega}_i \in \Omega_i$ such that

$$v_i(a,\bar{\omega}_i) = 0 \ \text{ for all } \ a \in A$$

配分に関心ないタイプ $\bar{\omega}_i$ が存在するとする：

（オークションでは、財評価ゼロのタイプ：$\bar{\omega}_i = 0$）

この追加仮定下では

ピヴォット・メカニズムにおける徴収額は

$$h_i(\omega_{-i}) = \max_{a \in A} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a,\omega_j)$$

「プレーヤー i 抜きの時の最大化総余剰」に一致（**Think why**）

よって追加仮定下では
ピヴォット・ＶＣＧメカニズムにおける支払いルールは

$$x_i(m) = -\sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(g(m), m_j) + \max_{a\in A} \sum_{j\in N/\{i\}} v_j(a, m_j)$$

となる。つまり

「自分がいなかった時の他のプレーヤーの最大便益：　$\max_{a\in A} \sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(a, m_j)$」

—「自分がいる場合の他のプレーヤーの便益：　$\sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(g(m), m_j)$」

＝「自分がいることによって被る他のプレーヤーの損失分」

を CP に支払うことになる

Marginal Contribution（限界的貢献度）

ピヴォット・メカニズムにおいて、各プレーヤーの利得は

$$v_i(g(\omega),\omega_i) - x_i(\omega) = \sum_{j \in N} v_j(g(\omega),\omega_j) - \max_{a \in A} \sum_{j \in N\setminus\{i\}} v_j(a,\omega_j)$$
$$= \max_{a \in A} \sum_{j \in N} v_j(a,\omega_j) - \max_{a \in A} \sum_{j \in N\setminus\{i\}} v_j(a,\omega_j)$$

となる。

これはつまり

Marginal Contribution

（限界的貢献度「自分がいることによって総余剰がどのくらい高まるか」）

が利得になっている

4. 3. 二位価格入札は Pivot Mechanism である

Pivot Mechanism:

$$x_i(m) = -\sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(g(m), m_j) + \max_{a\in A} \sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(a, m_j)$$

$$= -0 + \max_{j\neq i} m_j = \max_{j\neq i} m_j \qquad \text{if} \quad g(m) = i \quad \text{（落札）}$$

$$= -\max_{j\neq i} m_j + \max_{j\neq i} m_j = 0 \qquad \text{if} \quad g(m) \neq i \quad \text{（非落札）}$$

∴ 二位価格入札はピヴォット・メカニズムである！

＊ 二位価格入札のコペルニクス的発想転換

価格の決まり方（いくら？高い安い？）

⇒　配分の効率性：二位価格を支払う（自分がいることで失う他者の便益）

⇒　ピヴォット・メカニズムへ一般化！

ＶＣＧメカニズムは唯一無二のすごいデザイン！

１）**State Space** をとても広く取って、「どのような利得関数も実現しうる」ことを仮定すると、**VCG** メカニズム以外に効率的な **incentive compatible mechanism in dominant strategy** は存在しない。

Theorem 7-2 (Green-Laffont-Holmstrom Theorem)：Suppose that for any $\eta : A \to R$ and any $i \in N$, there exists $\omega_i \in \Omega_i$ such that $v_i(\cdot, \omega_i) = \eta$. Then, VCG mechanisms are only direct mechanisms satisfying DIC.

２）優位戦略を **BNE** に置き換えても、**Pivot mechanism** よりも高い収入を **CP** にもたらすような **incentive compatible mechanism in BNE (with participation constraint)** は存在しない。
（これは、後述する「収入同値定理（**Revenue Equivalence Theorem**）」から導かれる）

３）**Private Values** 以外には、利得関数に制約条件必要なし。

しかし、VCG メカニズムにも問題点がある......

１）　**Private Values** の仮定が必要
Interdependent Values の場合には嘘をつくインセンティブが考えられる：

$$v_i(g(\omega),\omega)+\sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(g(\omega),\omega)$$
$$< v_i(g(m_i,\omega_{-i}),\omega)+\sum_{j\in N\setminus\{i\}} v_j(g(m_i,\omega_{-i}),m_i,\omega_{-i})$$

となる $m_i \neq \omega_i$ が存在しうる
（「他の人の利得は高くないよ」などとうそをつく）

２）　談合（カルテル）が成立しやすい（後述）

３）　収支均衡しない：
CP 除く全員の支払い額を足してもゼロにならない

４）　機会費用＝０でない場合、**CP** の赤字が解消されない（後述）

５）　**Cognitive Complexity:**
正直が優位戦略にもかかわらず、メカニズム自体がわかりにくい
二位価格入札ですら現実にあまりつかわれてこなかった
ただし、せり上げ入札やプロキシ入札：は現実によく使われている
二位価格入札と論理的にはほぼ同じか類似（後述）

６）　**Computational Complexity**
複雑な配分問題になると効率的配分の計算がとても難しい
Algorithmic Game Theory: New Field of Game Theory
Incentive Auction

そしてたぶん以下がもっとも重要な **VCG** の問題点**....**

７） 複雑なオークションの問題を実際に解決したい時に、担当者も学者も「**VCG** は社会実装に不向きだ」と判断するケースが多い

オークションのノーベル賞

１９９６年 **Vickrey**
純粋理論
VCG メカニズム

２０２０年 **Milgrom and Wilson**
社会実装のための理論
SMRA（同時複数ラウンドせり上げオークション）
第２部にて紹介

第 **4** 章終わり
第 **1** 部終わり

宿題（４）を提出すること