2021 年 10 月 21, 25 日（仮）

第 6 章：オークション基礎（1）：
Private Values

6.1. 収入同値定理
（Revenue Equivalence Theorem）

参考文献：松島経セミ第 6 回

（期待）利得同値定理：	**Payoff Equivalence**
（期待）支払い同値定理：	**Payment Equivalence**
（期待）収入同値定理：	**Revenue Equivalence**

一位価格入札と二位価格入札の分析（一財一単位売買）：覚え書き

- 分布独立性
- 連続空間 $\Omega_i = [0,1]$ **(generally, multi-dimensional Euclidean Space** $\Omega_i = [0,1]^m$**)**
- 分布対称性および **Private Values** 下では、一位価格入札と二位価格入札で同じ社会的選択ルール（効率的配分）を達成する。この時、同じ期待利得、同じ期待支払額、同じ期待収入、を達成する（同値性）

第 6.1 節の目的：一般的な性質に拡張

同値定理

- 達成される社会的選択ルールが同じになるメカニズムであれば、どれも同じ期待収入、同じ期待支払額、同じ期待利得になる

- 効率的配分ルール（効率的社会的選択ルール）を達成する代表的なメカニズムは **VCG** メカニズム（あるいは **Pivot** メカニズム）である。もし **Pivot** メカニズムよりも期待収入を高めたいのであれば、売り手は、効率的配分をあきらめ、非効率な独占販売のメカニズムデザインを考える必要がある。

6. 1. 1. 同値定理ウォーミングアップ：離散空間から連続空間へ

（簡単な例による説明）

入札者2人、非分割財１単位

- 入札者２のタイプは　$\omega_2 = 1/2$　（不確実性なし）

  入札者１のタイプは　$\omega_1 = 0 \quad or \quad 1$　（私的情報）

＊　$g(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1, 1/2)$ を $g(\omega_1)$ と略記（同様に $x_i(\omega_1)$）

効率的で Bayesian Incentive Compatible（BIC）みたす Direct Mechanism (g, x) はどのようなものになるか？

参加制約：非落札時の支払いをゼロとしよう

効率的配分ルール：

$$g(1) = 1$$
$$g(0) = 2$$

（Think why）

支払いルール：

$$x_2(0) = 1/2$$
$$x_2(1) = 0$$
$$x_1(0) = 0$$

（Think why）

Question:

$$x_1(1) = ?$$

タイプ１の入札者１（必ず落札）はいくら支払うとすれば BIC 成立するか

入札者１が正直にタイプ表明する（**BIC**）には

$\mathbf{1 - x_1(1) \geq 0}$（$\boldsymbol{\omega_1 = 1}$ の正直インセンティブ）および

$\mathbf{0 - x_1(1) \leq 0}$（$\boldsymbol{\omega_1 = 0}$ の正直インセンティブ）：

$$\mathbf{0 \leq x_1(1) \leq 1}$$

BIC みたす支払い額には幅がある

$$\mathbf{x_1(1) = 1}$$

をえらべば売り手の期待収入最大化

この時、売り手は最大化総余剰額をすべて自分の収入にできる：

Full Surplus Extraction

- 次に、入札者１のタイプを増やして、$\omega_1 \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ としよう：

$$x_1(2/3) = x_1(1)、x_1(1/3) = x_1(0) = 0$$ であることが必要（**Think why**）

$$\min_{\omega_1 > 1/2} \omega_1 = 2/3 \geq x_1(1) \geq 1/3 = \max_{\omega_1 < 1/2} \omega_1$$

であれば **BIC** をみたす。

範囲が縮まっていることに注意！

（中間領域のタイプ $1/3$, $2/3$ のインセンティブが制約になる。**Think Why**）

$$x_1(1) = 2/3$$

をえらべば期待収入最大化される。

しかし、もはや売り手は総余剰をすべて徴収できない

入札者１に「情報レント（Information Rent）」発生

タイプ $2/3$ の入札者１が購入するためには

$x_1(2/3) \le 2/3$ でないとだめ

一方、タイプ１の入札者１は「$x_1(1) = 1$」円まで払える

しかし $x_1(1) > 2/3$ ならば、タイプ $2/3$ だと嘘ついて安く買おうとする

∴　タイプ１に対しても $2/3$ しか徴収できない：

「情報レント」$1 - 2/3 = 1/3$ 円が発生

・　入札者１のタイプをさらに増やして

$$\omega_1 \in \{0, \frac{1}{L}, \frac{2}{L}, \ldots, \frac{L-1}{L}, 1\}$$

としよう（$L \geq 5$を奇数とする）

$$x_1(\omega_1) = x_1(1) \qquad \text{for all } \omega_1 > \frac{1}{2}$$

$$x_1(\omega_1) = x_1(0) = 0 \quad \text{for all } \omega_1 < \frac{1}{2}$$

(Think why)

$$\therefore \quad \min_{\omega_1 > 1/2} \omega_1 = \frac{L+1}{2L} \geq x_1(1) \geq \frac{L-1}{2L} = \max_{\omega_1 < 1/2} \omega_1$$

L を無限に拡大していくと $x_1(1)$ は $1/2$ に収束

期待収入一意に確定！

情報レントは各タイプ $\omega_1 > 1/2$ について $\omega_1 - 1/2$:

Surplus 全て召し上げ！

・ 離散タイプ集合 $\boldsymbol{\Omega_1 = \{0, \frac{1}{L}, \ldots, \frac{L-1}{L}, 1\}}$ を連続タイプ集合 $\boldsymbol{\Omega_1 = [0,1]}$ に近づけていけば期待収入は一意に確定

「連続空間のタイプ集合であれば
同じ社会的選択関数 $\boldsymbol{f : \Omega \to A}$ を達成する
どんな **BIC** メカニズムも
実質的に同じ期待収入をもたらす！」
ことを示唆している
（同値定理へ）

6. 1. 2. 同値定理

以下、連続空間、分布独立性を仮定

（当面は、**Private Values** の仮定いらない）

BIC をみたす **Direct Mechanism** $(\boldsymbol{g},\boldsymbol{x})$ がもたらす
期待利得、期待支払額、期待収入を
もとめてみよう

するとそれらの値は
$\boldsymbol{g}$ に依存するが $\boldsymbol{x}$ には依存しないことがわかる

∴「同値定理」

他のプレーヤーが正直な戦略に従う時、タイプ ω_i のプレーヤー i が ω_i' を表明した場合の期待利得：

$$y_i(\omega_i', \omega_i) \equiv E[v_i(g(\omega_i', \omega_{-i}), \omega) - x_i(\omega_i', \omega_{-i}) \mid \omega_i]$$

（ω_i について連続とする）

正直に表明（$\omega_i' = \omega_i$）した場合の期待利得：

$$y_i^*(\omega_i) \equiv y_i(\omega_i, \omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega) \mid \omega_i]$$

Bayesian Incentive Compatibility (BIC) の定義を書き直すと

$$y_i^*(\omega_i) \geq y_i(\omega_i', \omega_i) \quad \text{for all } i,\ \omega_i, \text{ and } \omega_i'$$

つまり

$$y_i^*(\omega_i) = \max_{\omega_i' \in \Omega_i} y_i(\omega_i', \omega_i) \quad \text{for all } i,\ \omega_i$$

ここで特に重要な仮定をおく：

「絶対連続性（Absolute Continuity）」

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} \rho(b)db + y_i^*(0)$$

をみたす $\rho : [0,1] \to R$ が存在する

$\therefore \quad y_i^*(\omega_i)$ は連続でほぼいたるところで微分可能

「$y_i^*(\omega_i) \equiv y_i(\omega_i, \omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega) \mid \omega_i]$ が
絶対連続である」という仮定は
(g, x) が BIC であれば
実は非常に弱い仮定である：

＊ $y_i^*(\omega_i)$ の連続性は、$v_i(a, \omega)$ が a について連続でなくても成立する：
（有界な）$v_i(a, \omega)$ と $p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i)$ が ω_i について連続とする（弱い仮定）
ならば

$$\max_{\omega_i' \in \Omega_i} y_i(\omega_i', \omega_i) \equiv \max_{\omega_i' \in \Omega_i} E[v_i(g(\omega_i', \omega_{-i}), \omega) - x_i(\omega_i', \omega_{-i}) \mid \omega_i]$$

は ω_i について連続になっている（**Think why**）

BIC より

$$y_i^*(\omega_i) = \max_{\omega_i' \in \Omega_i} y_i(\omega_i', \omega_i)$$

は ω_i について連続になることがわかる

三つの重要定理

Theorem 6-1：期待利得同値（Payoff Equivalence)

Direct mechanism (g,x) が **BIC** および $y_i^*(0)=y_i^0$ をみたすならば、任意のタイプ $\omega_i\in[0,1]$ の期待利得は

$$y_i^*(\omega_i)=\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i' + y_i^0$$

ここで、$v_{i2}(a,\omega)\equiv\dfrac{\partial v_i(a,\omega)}{\partial\omega_i}$

$E_{\omega_{-i}}[\cdot]=E[\cdot\mid\omega_i]$は ω_{-i} についての分布独立性下での **Expectation Operator.**

（証明は超重要、後まわし）

この定理の重要ポイント：

期待利得は配分ルール g に依存しているが、支払いルール x に依存しない

BIC であれば、x に無関係に期待利得が決まる

Theorem 6-2：期待支払同値（Payment Equivalence)

Direct mechanism (g,x) が **BIC** および $y_i^*(0)=y_i^0$ をみたすならば、任意のタイプ $\omega_i\in[0,1]$ の期待支払い額は

$$E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega)]$$

$$=E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega)]-\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i}E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i'-y_i^0$$

証明：$E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega_i,\omega_{-i})]=y_i^*(\omega_i)+E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega)]$ および定理 **6-1** より

$$E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega)]=E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega)]-\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i}E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i'-y_i^0$$

タイプ ω_i の期待支払額は x から独立！

Theorem 6-3：期待収入同値（Revenue Equivalence)

Direct mechanism（(g,x)）が BIC および $y_i^*(0) = y_i^0$ をみたすならば、期待収入は

$$E[\sum_{i\in N} x_i(\omega)]$$

$$= \sum_{i\in N} E_{\omega_i}[E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega_i)] - \int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i' - y_i^0]$$

証明：定理 **6-2** から自明

期待収入は x から独立！

Theorem 6-1 を証明しよう

Theorem 6-1：期待利得同値（Payoff Equivalence)

Direct mechanism (g,x) が **BIC** および $y_i^*(0)=y_i^0$ をみたすならば、任意のタイプ $\omega_i \in [0,1]$ の期待利得は

$$y_i^*(\omega_i)=\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i' + y_i^0$$

カギとなる数学的性質は

「包絡線定理（**Envelope Theorem**）」

包絡線定理（Envelope Theorem）：

$$y_i^*(\omega_i) \equiv y_i(\omega_i, \omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega) \mid \omega_i]$$

が絶対連続である、つまり

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} \rho(b) db + y_i^*(0)$$

をみたす $\rho : [0,1] \to R$ が存在すると仮定する。ならば、任意の ω_i について、ほぼいたるところで

$$\rho(\omega_i) = y_{i2}(\omega_i, \omega_i)$$

が成立する。つまり

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} y_{i2}(b, b) db + y_i^*(0)$$

Proof of Envelope Theorem:

Note

$$\rho(\omega_i) = \frac{dy_i(\omega_i,\omega_i)}{d\omega_i} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{y_i(\omega_i,\omega_i) - y_i(\omega_i-\Delta,\omega_i-\Delta)}{\Delta}.$$

Because of BIC and definition of $y_i(\omega_i',\omega_i)$**, we have**

$$\rho(\omega_i) \le \lim_{\Delta\to 0}\frac{y_i(\omega_i,\omega_i) - y_i(\omega_i,\omega_i-\Delta)}{\Delta} \equiv y_{i2}(\omega_i,\omega_i),$$

and

$$\rho(\omega_i) \ge \lim_{\Delta\to 0}\frac{y_i(\omega_i,\omega_i+\Delta) - y_i(\omega_i,\omega_i)}{\Delta} \equiv y_{i2}(\omega_i,\omega_i).$$

（**Think why.**）よって、ほぼいたるところで

$$\rho(\omega_i) = v_{i2}(\omega_i,\omega_i)$$

が成立する。

Q.E.D.

以下、包絡線定理と分布独立性を使って利得同値定理を証明する

分布独立性より $E[x_i(\omega_i', \omega_{-i}) \mid \omega_i] = E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega_i', \omega_{-i})]$ は ω_i から独立：

$$\frac{\partial}{\partial \omega_i} E[x_i(\omega_i', \omega_{-i}) \mid \omega_i] = 0$$

である。よって

$$y_i(\omega_i', \omega_i) \equiv E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega_i', \omega_{-i}), \omega_i, \omega_{-i})] - E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega_i', \omega_{-i})]$$

を ω_i について偏微分すると

$$y_{i2}(\omega_i', \omega_i) = E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i', \omega_{-i}), \omega_i, \omega_{-i})]$$

になる。$\omega_i' = \omega_i$ とすると、包絡線定理より

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i', \omega_{-i}), \omega_i', \omega_{-i})] d\omega_i' + y_i^0$$

が成立する。 **Q.E.D.**

6. 1. 3. 効率的配分と VCG Mechanism

以下、**Private Values** を仮定して、**VCG** メカニズムを再考しよう。

定理 **6-4**：
Private Values においては、**BIC** をみたす任意の効率的な **Direct mechanism** に対して、それと同じ期待収入、同じ期待利得、同じ期待支払い額をもたらす **VCG** メカニズムが必ず存在する。

つまり
VCG メカニズム（**Pivot mechanism**）よりも期待収入を高めたいのであれば
効率的配分をあきらめるしかない。
効率的配分の達成にこだわる限り
たとえ **DIC** を **BIC** に弱めても期待収入をより高めることはできない。

定理 6-4 の証明：

VCG mechanism は **BIC** をみたす効率的な **direct mechanism** である。

任意の **BIC** をみたす効率的な **direct mechanism** (g,x) に対して、**VCG mechanism** $(g,\hat{x})$ を

$$E_{\omega_{-i}}[h_i(\omega_{-i})] = E_{\omega_{-i}}[x_i(0,\omega_{-i})] + E_{\omega_{-i}}[\sum_{j \in N \backslash \{i\}} v_j(g(0,\omega_{-i}),\omega_j)]$$

をみたすように定める。この時、**VCG mechanism** $(g,\hat{x})$ のタイプゼロの期待利得は (g,x) と同じになる。

よって、同値定理より、この **VCG mechanism** はもとの **direct mechanism** と同じ期待収入　、同じ期待利得、同じ期待支払い額をもたらす。

Q.E.D.

補論：**Belief System** が非対称（$\boldsymbol{P^1 \neq P^2}$）の場合、一位価格入札のＢＮＥは？

Intuition:

入札者１の方が、入札者２より、「低いタイプの可能性」が高いとしよう
入札者１は「弱い立場」入札者２は「強い立場」

入札者１は高めに指値しないと勝ち目はないと判断
入札者２は低めに指値しても勝てると判断
よって
入札者１の方が低いタイプであったとしても、入札者２のタイプとあまり差がなければ
入札者１の指値の方が高くなる

$\Rightarrow$ 非効率配分へ
（二位価格入札との違いに注意）

（以下、より詳しい説明）

効率的配分達成のためには入札者 1 も 2 も、各々単調増加で対称な戦略

$$s_1(b) = s_2(b) \ \text{ for all } \ b \in [0,1]$$

をプレイする必要がある。戦略プロファイル s が BNE になるための条件を考えてみよう。

入札者 1 の期待利得は　$(\omega_1 - b)P^2(s_2^{-1}(b))$

b について最大化すると

$$\frac{\partial}{\partial b}(\omega_1 - b)P^2(s_2^{-1}(b))$$

$$= -P^2(s_2^{-1}(b)) + (\omega_1 - b)p^2(s_2^{-1}(b))\frac{ds_2^{-1}(b)}{db} = 0$$

この一階条件が $b = s_1(\omega_1)$ にて成立しなければいけない。対称性（$s_1 = s_2$）から

$$-P^2(\omega_1) + (\omega_1 - s_1(\omega_1))p^2(\omega_1)\frac{1}{s_1'(\omega_1)} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\omega_1 - s_1(\omega_1)}{s_1'(\omega_1)} = \frac{P^2(\omega_1)}{p^2(\omega_1)}$$

入札者 **2** についても同様に

$$\frac{\omega_2 - s_2(\omega_2)}{s_2'(\omega_2)} = \frac{P^1(\omega_2)}{p^1(\omega_2)}$$

分布対称性（$P^1 = P^2$ ）、戦略対称性（$s_1 = s_2$）より、

$$\frac{P^1(b)}{p^1(b)} = \frac{P^2(b)}{p^2(b)} \quad \text{for all} \quad b \in [0,1]。$$

これは分布対称性下でないと成立しない。つまり分布対称性（$P^1 = P^2$ ）が成立していないとだめ。

Belief System が非対称の場合
一位価格入札のＢＮＥは「非効率」にならざるをえない！

入札者１は入札者２よりも「弱い立場」
(Krishna Ch.4, Proposition 4.4)

入札者 **1** の方が「**Reverse Hazard Rate**」低い、つまり
入札者１の方が低い評価である確率が高いとしよう：

$$\frac{p^2(b)}{P^2(b)} > \frac{p^1(b)}{P^1(b)}$$

よって、一階条件より、

$$\frac{b - s_1(b)}{s_1'(b)} < \frac{b - s_2(b)}{s_2'(b)}$$

入札者１（弱）のほうが **Price discount** しないことを意味する（より高めに指値）：

$$s_1(b) > s_2(b) \text{ for all } b \in [0, \infty)$$

よって、

「弱い」入札者（相手から見て低いタイプと予想されている入札者）は
「強い」入札者よりも高めに指値
⇒　非効率配分

モデルが非対称の場合、一位価格入札では配分非効率（二位価格入札では効率的配分）

一位価格入札の方が、二位価格入札より期待収入が高くなることある

（売り手は、配分非効率性の代償を払って（一位価格入札を選んで）期待収入アップをもくろむかも）

（続く）