2021 年 11 月 4 日

第８章：オークション（応用編）

オークション基礎編	**Private Values:**	単一財取引 **as special case**
		VCG in general
		(Individual incentive)
	Interdependent Values:	**Winner's Curse**
		Linkage Principle
オークション応用編	**Private Values**	**Multi-unit**
		Multi-Object (position)
		Multi-Object (package)
		Cartel
		(Collective incentive)
	Interdependent Values	

8.1. Multi-Unit Auction

単一財を複数単位売却する

Sequential auction： 一単位ずつ売却
ピカソのリトグラフ、ビンテージワインなど
アノマリー

Simultaneous Auction： 一度に売却：本節のテーマ
国債（金融資産）発行市場：　非分割財
電力市場：　分割可能財

8. 1. 1. Multiunit Auction の４つの代表的オークション・ルール

封印型： **Discriminatory Auction**（差別価格入札）：

一位価格入札の拡張

伝統的な国債発行入札（日本、英国、ドイツ、フランス…）

Uniform Price Auction（一律価格入札）：

二位価格入札のある意味での拡張（しかし **VCG** ではない）

アメリカの国債発行入札

公開型： **Ascending Clock Auction**（せり上げクロック入札）：

せり上げの拡張（非常にポピュラー）

電波オークション

Descending（**Clock**）**Auction**　（せりさげクロック入札）：

せりさげの拡張

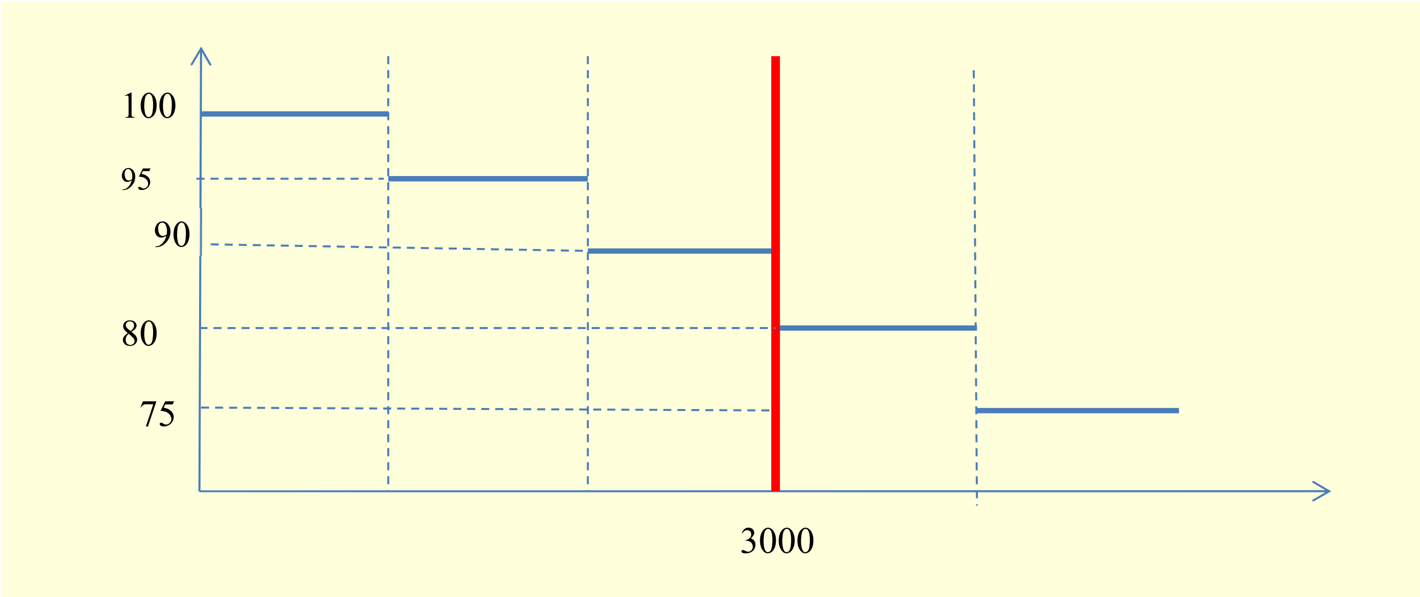
花卉オークション

数値例

単一種財 **3000** 単位を入札で売却：

Bidder 1:	１単位 **75** 円で	**1000** 単位購入希望
Bidder 2:	１単位 **100** 円で	**1000** 単位購入希望
Bidder 3:	１単位 **95** 円で	**1000** 単位購入希望
Bidder 4:	１単位 **80** 円で	**1000** 単位購入希望
Bidder 5:	１単位 **65** 円で	**1000** 単位購入希望
Bidder 6:	１単位 **90** 円で	**1000** 単位購入希望

⇒ 上位の **Bidders 2, 3, 6** に **1000** 単位ずつ売却：効率的配分（正直なら）


100
95
90
80
75
3000

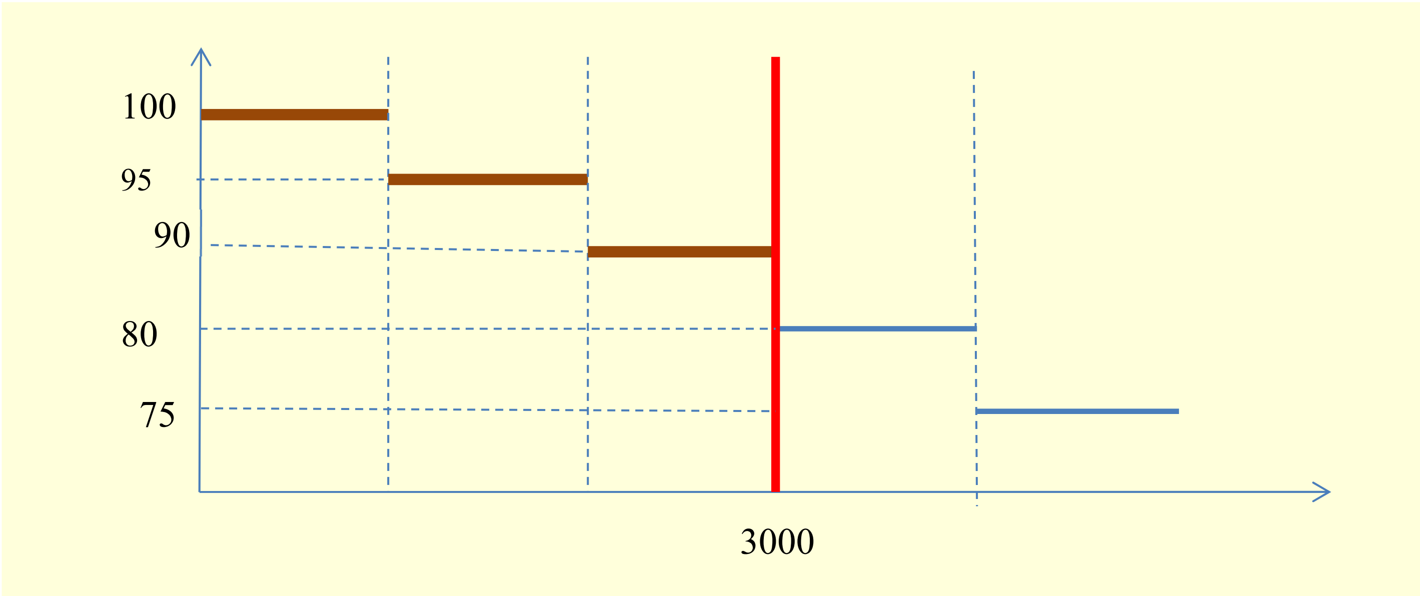
Discriminatory auction（差別価格入札）

封印型

本人の言い値で売却：

Bidder 2: １００円 × １０００単位 ＝ １０００００円支払う
Bidder 3: ９５円 × １０００単位 ＝ ９５０００円支払う
Bidder 6: ９０円 × １０００単位 ＝ ９００００円支払う

計 **100000＋95000＋90000＝285000** 円の収入


100
95
90
80
75
3000

（より厳格な定義として）
各入札者に「需要関数」を表明してもらう：

入札者 $i \in N$ は
「一単位目に **110** 円、**2** 単位目に **90** 円、**3** 単位目に **80** 円、**4** 単位目に **79** 円**, ...,**
2999 単位目に **2** 円**, 3000** 単位目に **1** 円払っていい」と表明
つまり需要関数を表明：
$D_i : [0,\infty) \to \{0,...,\}$：右下がりの関数

「任意の単位価格 $p \in \{0,1,...\}$ に対する需要は $D_i(p)$ 単位です」

表明された総需要関数は $D : [0,\infty) \to \{0,1,2,...,\}$

$$D(p) \equiv \sum_{i \in N} D_i(p)$$

固定量 S 単位が供給されるとすると：

需給均衡 $D(p) = S$ をみたす（最低）価格 p より高い **Willingness to Pay** の需要が取引対象

取引価格は各単位における「**Willingness to Pay**」（差別価格）

$P = 80$ ならば入札者 i は **3** 単位購入
1 単位目 **110** 円、**2** 単位目 **90** 円、**3** 単位目 **80** 円
合計 **110＋90＋80＝280** 円支払う。

Uniform Price Auction（一律価格入札）

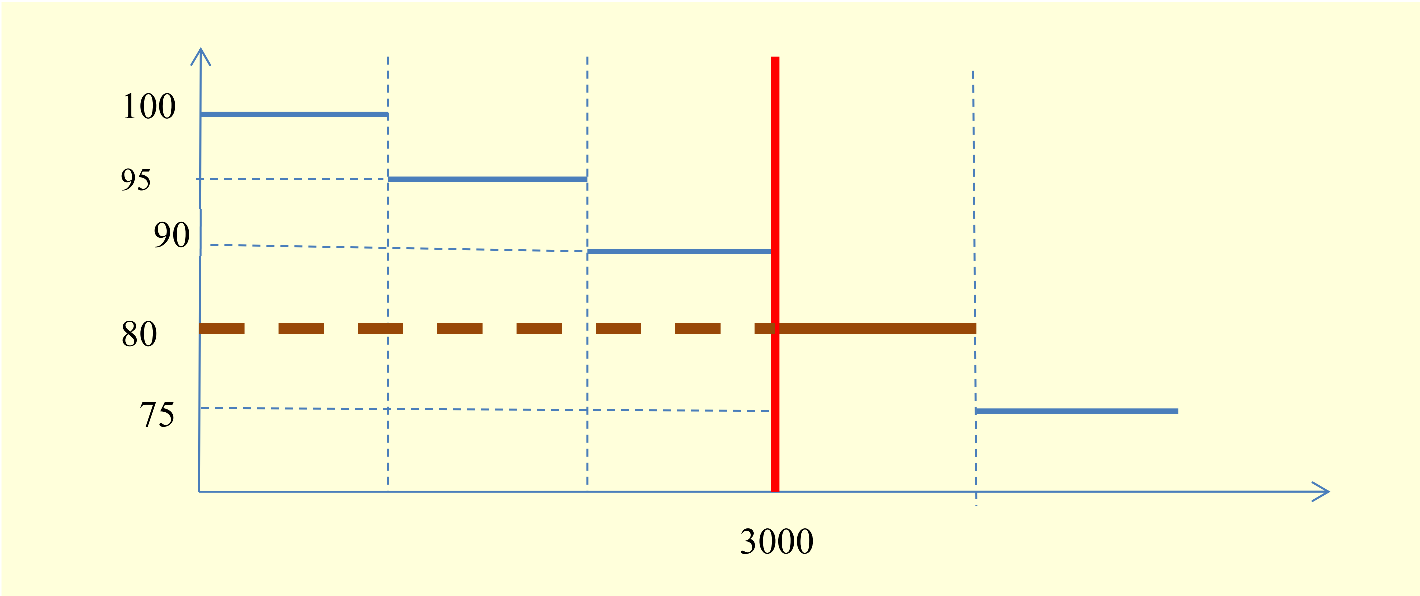
（実務ではこれを **Dutch auction** と呼ぶので要注意。通常 **Dutch Auction** はせり下げ）

封印型

最低落札価格（９０円）と最高非落札価格（８０円）の間の任意の一律価格で売却
理論の慣例として、最高非落札価格８０円とする

ある意味において「二位価格入札」の拡張

Bidder 2:	**80** 円	×	**1000** 単位	＝	**80000** 円支払う
Bidder 3:	**80** 円	×	**1000** 単位	＝	**80000** 円支払う
Bidder 6:	**80** 円	×	**1000** 単位	＝	**80000** 円支払う
計	**80000**＋**80000**＋**80000**＝**240000** 円の収入				


100
95
90
80
75
3000

（より厳格な定義として）
各入札者に需要関数を表明してもらう：

入札者 $\boldsymbol{i \in N}$ は
「一単位目に **110** 円、**2** 単位目に **90** 円、**3** 単位目に **80** 円、**4** 単位目に **79** 円**, ...,**
2999 単位目に **2** 円**, 3000** 単位目に **1** 円払っていい」と表明
つまり需要関数を表明：
$\boldsymbol{D_i : [0,\infty) \to \{0,...,\}}$：右下がりの関数
「任意の単位価格 $\boldsymbol{p \in \{0,1,...\}}$ に対する需要は $\boldsymbol{D_i(p)}$ 単位です」
表明された総需要関数は $\boldsymbol{D : [0,\infty) \to \{0,1,...\}}$

$$\boldsymbol{D(p) \equiv \sum_{i \in N} D_i(p)}$$

（ここまで、**Discriminatory Auction** と同じ）

固定量 S 単位が供給されるとすると：

需給均衡 $D(p)=S$ をみたす（最低）価格 p より高い **Willingness to Pay** の需要が取引対象

取引価格は「一律 p 円」

$P=80$ ならば入札者 i は **3** 単位購入：合計 **80×3＝240** 円支払う。

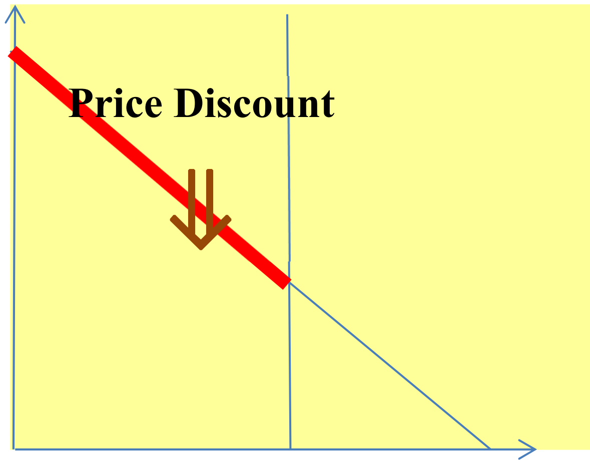
Discriminatory Auction と Uniform Price Auction どっちがいい？

どっちもどっち：　理論的にも実証的にもなんともいえない
理論：Bach and Zender (93)
実証：Archibald and Malvey (1998), Hortaçsu and McAdams (2010)

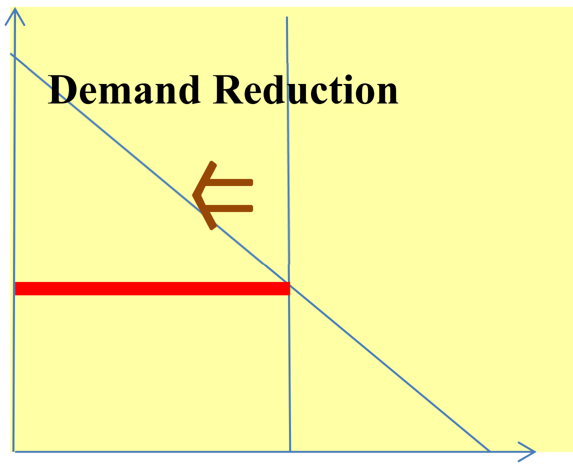
Discriminatory Auction の問題点： **Price Discount**
安く指値しようとする
その結果低価格、非効率も

Uniform Price Auction の問題点： **Demand Reduction**
少なめに需要表明しようとする
その結果低価格、非効率も

Discriminatory では「Price Discount」発生



Uniform Price Auction では「Demand Reduction 」発生



Ascending Clock Auction（せりあげクロック入札）

公開型：**High Popularity**

セリ人（オークショ二ア）が単位価格をせりあげる

入札者はセリ人の公示価格にたいして需要を表明

総需要が供給をうわまわれば、さらにせりあげ

総需要と供給が一致すると、せり上げ終了

せり終了時の単位価格（一律価格）ですべての単位を取引する

たとえば入札者 $i \in N$ は

「**1** 円まで **3000** 単位、**2** 円まで **2999** 単位**,…,** **79** 円まで **4** 単位、**80** 円まで **3** 単位
90 円まで **2** 単位、**110** 円まで **1** 単位、それを超えると需要ゼロ」

という戦略をとるとする

一律価格が **80** 円ならば、この入札者は **3** 単位を一律 **80** 円、合計 **240** 円支払う。

「せりあげクロック式（公開型）」は「一律価格入札（封印型）」
と同じゲームになる
（せり上げ入札と二位価格入札との類似に対応）

「**Demand Reduction**」という非効率性問題を抱える

Descending Clock Auction（せりさげクロック式）

花卉（かき）オークション

アールスメール（アムステルダム）

大田区大田市場

公開型

競り人（オークショニア）が単位価格をせりさげる

入札者は競り人の公示価格にたいして需要を表明する

需要を追加表明した時点での価格で随時取引成立

総需要が供給をしたまわれる限り、さらにせりさげる

総需要と供給が一致すると、せりさげ終了

たとえば入札者 $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N}$ は

「**110** 円を超える価格ならば需要ゼロ、**110** 円にて **1** 単位需要表明
90 円にて追加一単位（**2** 単位目）、**80** 円にて追加一単位（３単位目）
79 円にて追加一単位（**4** 単位目）**, …,**
2 円にて追加 **1** 単位（**2999** 単位目）、１円にて追加 **1** 単位（**3000** 単位目）」

という戦略をとる

せりあげ終了時の価格が **80** 円ならば、この入札者は一単位目を **110** 円、**2** 単位目を **90** 円、**3** 単位目を **80** 円
合計 **3** 単位を、合計 **110**＋**90**＋**80**＝**280** 円支払って購入

「せりさげクロック式（公開型）」は「差別価格入札（封印型）」
と同じゲームになる
（せりさげ入札と１位価格入札との類似に対応）

「**Price Discount**」という非効率性問題を抱える

8. 1. 2. Vickrey Auction

4つの標準的なオークション・ルールでは一般的に
優位戦略は存在しない
(Price discount, Demand reduction)
効率的配分が達成される保証ない
つまり一般的にはＶＣＧでない！

Multiunit Auction における
ＶＣＧメカニズムはどのような方式になるか？

Vickrey (Multiunit) Auction！

Vickrey Auction
（VCG Mechanism in Multiunit Allocation）

$K \geq 2$ units 供給

入札者のタイプ：　$\omega_i = (\omega_i^1, ..., \omega_i^K) \in \Omega_i$

ω_i^k とは：　Bidder $i's$ valuation for $k-th$ additional purchase

$\omega_i^1 \geq \omega_i^2 \geq \cdots \geq \omega_i^K \geq 0$

配分：　$a = (a_1, ..., a_n) \in A$

$\sum_{i \in N} a_i \leq K$

$a_i \in \{0, ..., K\}$ とは：　Number of bidder $i's$ purchases

入札者 i の利得：　$v_i(a, \omega_i) = \sum_{k=1}^{a_i} \omega_i^k$

Vickrey Auction (g, x) の定義：
（VCG メカニズムを Multi-Unit に応用）

効率的配分ルール g

財評価の高い順に割り当てる：

任意の $i \in N$, 任意の $j \in N$, 任意の ω について

$$\omega_i^{a_i} \geq \omega_j^{a_j+1}, \text{ where } g(\omega) = a = (a_i)_{i \in N}$$

支払ルール x_i

入札者 i 以外の入札者の $(n-1)K$ 個の財評価

$\{\omega_j^k\}_{k\in\{1,...,K\},j\in N\setminus\{i\}}$ を

大きい値から順番にならべよ！

$$\delta^1(\omega_{-i},i)\geq\delta^2(\omega_{-i},i)\geq\cdots\geq\delta^{(n-1)K}(\omega_{-i},i)$$

For each $h\in\{1,...,(n-1)K\}$,

there exists $(j,k)\in(N\setminus\{i\})\times\{1,...,K\}$ **such that**

$\delta^h(\omega_{-i},i)=\omega_j^k$.

支払いルールを

$$x_i(\omega) = \sum_{k=K-a_i+1}^{K} \delta^k(\omega_{-i}, i)$$

(where $a = g(\omega)$)

と特定化

入札者 i 以外の評価のうち、$K - a_i + 1$ 番目から K 番目までの計 a_i 個を足したもの。
うしろの a_i 個は入札者 i に取られてしまう。よって

$$\sum_{k=K-a_i+1}^{K} \delta^k(\omega_{-i}, i)$$

は「入札者iが加わったことによって他の人が被る損失分」！

例で考えよう：$K = 5$、$n = 5$

	1 単位目	２単位目	３単位目	４単位目
入札者１	**100**	**51**	**11**	**9**
入札者２	**120**	**102**	**73**	**10**
入札者３	**60**	**45**	**35**	**20**
入札者４	**70**	**12**	**0**	**0**
入札者５	**80**	**75**	**74**	**55**

入札者１が払う額は　**74** 円
入札者２が払う額は　**74＋70＝144** 円
入札者３が払う額は　**0** 円
入札者４が払う額は　**0** 円
入札者５が払う額は　**73＋70＝143** 円

8. 1. 3. Ausubel Mechanism

Vickrey Auction は実際にはほとんど使われていない
様々な理由あり（第 **10** 章で検討）：
例えば「支払い額がどのように決まるか入札者にわかりづらい」

その点「公開型（せりあげ）」はわかりやすい：
せり上げの途中で支払価格が明らかにされていく
観察された価格情報をもとに指値の判断をすると楽

Cognitive Psychology:
Hypothetical Thinking（仮説的思考）
「頭の中で相手の出方についてあれこれ仮説を立てて考える」
苦手
⇒ **Information Extraction from Observations**
「観察されたものに反応する」
こっちの方が楽（**cf.** ローマ帝国帝位の例）

Ausubel Mechanism

オースベルによって提案された
Vickrey Auction の公開型ヴァージョン

「せり上げの途中で購入が確実になった場合
購入が確実になった時点の価格で
購入確実になった単位分が取引される」

とする公開型入札ルール

（社会実装しやすくするための工夫があるものの
まだあまり普及していない）

例で考えよう：$K = 5$、$n = 5$

	1 単位目	2 単位目	3 単位目	4 単位目
入札者 1	**100**	**51**	**11**	**9**
入札者 2	**120**	**102**	**73**	**10**
入札者 3	**60**	**45**	**35**	**20**
入札者 4	**70**	**12**	**0**	**0**
入札者 5	**80**	**75**	**74**	**55**

セリ人がゼロ円からせりあげ
需要は正直表明（インセンティブも **OK**）

価格が **69** 円までせりあがる

入札者１は１単位：　自分以外の需要は **7** 単位
入札者２は **3** 単位：　自分以外の需要は **5** 単位
入札者３は０単位：　自分以外の需要は **8** 単位
入札者４は **1** 単位：　自分以外の需要は **7** 単位
入札者５は **3** 単位：　自分以外の需要は **5** 単位

自分以外の需要は供給量 **5** 以上：自分以外に財を配分したら一単位も残らない

価格が **70** 円までせりあがる

入札者１は１単位：　自分以外の需要は **6** 単位
入札者２は **3** 単位：　自分以外の需要は **4** 単位
入札者３は０単位：　自分以外の需要は **7** 単位
入札者４は０単位：　自分以外の需要は **7** 単位
入札者５は **3** 単位：　自分以外の需要は 4 単位

入札者 **2** および入札者 **5** については自分以外の需要は供給量 **5** 未満（４）：
自分以外に財を配分しても１単位のこる

よって、入札者 **2** と **5** は、この時点で各々**1** 単位の購入が確定する

価格は確定時の価格 **70** 円とする

価格が **73** 円までせりあがる

入札者１は１単位：　自分以外の需要は **5** 単位
入札者２は **2** 単位：　自分以外の需要は **4** 単位
入札者３は０単位：　自分以外の需要は **6** 単位
入札者４は０単位：　自分以外の需要は **6** 単位
入札者５は **3** 単位：　自分以外の需要は **3** 単位

入札者 **5** は **2** 単位目の購入が確定：

価格は **73** 円とする

価格が **74** 円までせりあがる

入札者１は１単位：　自分以外の需要は **4** 単位
入札者２は **2** 単位：　自分以外の需要は **3** 単位
入札者３は０単位：　自分以外の需要は **5** 単位
入札者４は０単位：　自分以外の需要は **5** 単位
入札者５は **2** 単位：　自分以外の需要は **3** 単位

入札者１，２は各々**1** 単位目、２単位目の購入が確定：

価格は **74** 円とする

この段階で
「入札者１は１単位、入札者２は２単位、入札者５は 2 単位」
合計５単位すべて確定

せり上げの途中で
落札価格が購入単位ごとに確定する手順がわかるので
入札者に混乱はあまりないはず
（いかが？）

（続く）