

第10章：意思決定理論（1）

10.1. 意思決定（Decision Making）とは？

消費者行動理論（2財のケース）：

選択肢全体集合

$$X = [0, \infty)^2$$

選好関係

無差別曲線群

選択肢集合

$$B \subset X \text{ (あるいは } B \in 2^X \setminus \{\emptyset\})$$

予算集合 (予算 Y 円、財1 p_1 円、財2 p_2 円)

$$B = \{x \in X \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq Y\} \subset X$$

選択ルール

$$C : 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X,$$

$$C(B) \in B \text{ for all } B \in 2^X$$

需要関数

経済主体（消費者、事業者、会社組織、政府、.....）
はさまざまな意思決定問題に直面している

意思決定問題（一般）：

選択肢全体集合	X
選好関係	\succsim (あるいは $u: X \rightarrow R$) ~
選択肢集合	$B \subset X$ (あるいは $B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$)
選択ルール	$C: 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ $C(B) \in B$ for all $B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$

意思決定問題の二つの視点

- 予測** (本章) : 選択ルール $C: 2^X \rightarrow X$ の導出
 選好関係 \succsim が与えられた時、任意の選択肢集合 $B \subset X$
 から何を選択するか?
- 推定** (第 11 章) : 選好関係 \succsim の導出
 データとして選択ルール $C: 2^X \rightarrow X$ が与えられた時、
 背後にどのような選好関係 \succsim が想定されるか?

「予測」と「推定」はフィードバックの関係

10.2. 選好 (Preference)

あなたは x と y のどっちがより好き？

選好関係 (二項関係) \succ
 \sim

$x \succ y$ x を y より選好する、あるいは x と y は無差別である

$x \sim y$ x と y は無差別である

$x \succ y$ x を y より選好する

選好順序 (Preference Ordering)

「完備性」と「推移性」をみたす選好関係

合理的経済主体の仮定：

全選択肢について「順序付け」している
(首尾一貫した選好関係)

完備性 (Completeness) : どの選択肢間について選好の比較ができる

任意の選択肢 $x \in X$ 、 $y \in X$ について

either $x \succsim y$ or $y \succsim x$

が成立する

* 「不完備性」と「無差別」は違う概念であることに注意せよ

推移性 (Transitivity) : 好き嫌いがサイクルにならない

任意の選択肢 $x \in X$ 、 $y \in X$ 、 $z \in X$ について

$$[x \succ y \text{ and } y \succ z] \Rightarrow [x \succ z]$$

- * 推移性をみたさない非合理的な人 (グーチョキパー的な人) :
 - 「バナナよりミカンが好き」
 - 「ミカンよりリンゴが好き」
 - 「リンゴよりバナナが好き」 (?)

10.3. 効用関数

選好順序（完備性＋推移性）は
「数字の大小」関係に置き換えることができる

効用関数

$$u: X \rightarrow R$$

$$[x \succsim y] \Leftrightarrow [u(x) \geq u(y)]$$

効用関数の値 $u(x)$ 自体には意味がない
 大小関係のみが重要 (序数的効用)

正単調変換からの不変性

任意の増加関数 $k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ について

$$v(x) = k(u(x)) \text{ for all } x \in X$$

とすると、 v もまた \succsim の効用関数になる (大小関係は不変だから) :

$$[x \succsim y] \Rightarrow [v(x) \geq v(y)]$$

効用関数は数学的に扱いやすい点で便利である

消費者の効用関数 (2財) : $u(x_1, x_2)$

単調増加、偏微分可能を仮定

偏微分 : 一方を固定して他方だけで微分 (ラウンド・ディー ∂)

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} (= u_1(x_1, x_2)), \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} (= u_2(x_1, x_2))$$

例 : $u(x_1, x_2) = x_1 x_2 - (x_1)^2 - 3(x_2)^2$

$$u_1(x_1, x_2) = x_2 - 2x_1$$

$$u_2(x_1, x_2) = x_1 - 6x_2$$

全微分： 無差別曲線（効用のレベル U 一定）
 $u(x_1, x_2) \equiv U$

効用のレベルを U に維持したまま（同一無差別曲線上で）
 x_1 と x_2 を微小動かす：

$$u_1(x_1, x_2)\Delta x_1 + u_2(x_1, x_2)\Delta x_2 = 0$$

$$MRS \equiv -\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{U=\text{constant}} = \frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)}$$

予算制約条件付き効用最大化：

Maximize $u(x_1, x_2)$ subject to $p_1 x_1 + p_2 x_2 = Y$

ラグランジュ乗数法：ラグランジュ乗数を $\lambda \in \mathbf{R}$ として

Maximize $u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - Y)$
with respect to $(x_1, x_2) \in [0, \infty)^2$

一階条件： $u_1(x_1, x_2) + \lambda p_1 = 0$

$u_2(x_1, x_2) + \lambda p_2 = 0$

をみたす (x_1, x_2, λ) を導出：

$$\frac{u_1(x_1, x_2)}{p_1} = -\lambda = \frac{u_2(x_1, x_2)}{p_2}$$

$$\therefore \mathbf{MRS} \equiv \frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

生産者の最適化も意思決定問題の一例である

$$\text{Maximize } p_1 x_1 + p_2 x_2 - c(x_1, x_2)$$

$$\text{一階条件： } p_1 = \frac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_1} (= c_1(x_1, x_2))$$

$$p_2 = \frac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_2} (= c_2(x_1, x_2))$$

$$\therefore \mathbf{MRT} \equiv \frac{c_1(x_1, x_2)}{c_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

10.2. 不確実性下の意思決定

不確実性： どの選択肢が選ばれるかわからない

株式： 株価アップ？ダウン？

投資： 成功？失敗？

不確実性下の意思決定： 多くの経済問題は不確実性下にある

不確実な選択を

単純くじ (simple Lottery) $L: X \rightarrow [0,1]$ ととらえる:

各選択肢 $x \in X$ は確率 $L(x)$ で選ばれる ($\sum_{x \in X} L(x) = 1$)

株式: 確率 30% で明日の株価 10 円アップ
 確率 70% で明日の株価 5 円ダウン

投資: 確率 10% で成功 (100 億円の収益)
 確率 90% で失敗 (10 億円の損失)

単純くじの全体集合を Ψ と表記する

退化くじ (degenerate lottery) : $[L(x) = 1] \Rightarrow [u(L) = u(x)]$
 確実に選択肢 x が選ばれる

混合くじ (Compound Lottery) : くじを選ぶくじ
 確率 p でくじ L 、確率 $1-p$ でくじ L' が
 選ばれる

帰結主義の仮定 (Consequentialism)

混合くじを単純くじに還元できるとする仮定をおく

確率 p でくじ L 、確率 $1-p$ でくじ L' が選ばれる混合くじを

各選択肢 $x \in X$ が確率 $pL(x) + (1-p)L'(x)$ で選ばれる単純くじと無差別とみなす

この単純くじは $pL + (1-p)L'$ と表記される

意思決定者は
くじ全体集合 Ψ について選好順序 \succsim をもつ

くじ全体に対する効用関数 : $u : \Psi \rightarrow R$

任意のくじ $L \in \Psi$ 、 $L' \in \Psi$ について
 $[L \succsim L'] \Leftrightarrow [u(L) \geq u(L')]$

正単調変換からの独立性の性質より
 特定の選好順序を表現する効用関数はたくさんありうるが
 その中でも期待効用関数による表現に着目！

選好順序 \succsim が (完備性と推移性ととともに)
 追加条件 (独立性と連続性、後述) をみたす場合
 任意のくじ L にたいする効用は、効用の期待値

$$u(L) = \sum_{x \in X} L(x)u(x)$$

として表現することができる (期待効用)

期待効用は便利：
 複雑なくじの効用も効用の期待値を計算しさえすれば **OK**

10.3. 期待効用 (Expected Utility)

二つの追加条件：連続性、独立性

連続性 (Continuity) :

任意のくじ $L \in \Psi$ 、 $L' \in \Psi$ 、 $L'' \in \Psi$ について

$pL' + (1-p)L'' \sim L$ をみたす $p \in [0,1]$ 全体の集合

$L \sim pL' + (1-p)L''$ をみたす $p \in [0,1]$ 全体の集合

がともに閉集合である。

「わたしは 60%を上回る確率で 100 円もらえるくじには 50 円払ってもいい。
わたしは 60%を下回る確率で 100 円もらえるくじには 50 円払いたくない。
だから、ちょうど 60%で 100 円もらえるくじと 50 円は無差別である。」

独立性 (**Independence**) : 期待効用のカギとなる条件

任意のくじ $L \in \Psi$ 、 $L' \in \Psi$ 、 $L'' \in \Psi$ 、任意の $p \in [0,1]$ について

$$[L \succsim L'] \Rightarrow [pL + (1-p)L'' \succsim pL' + (1-p)L'']$$

独立性の含意

二つのくじ $L = (100\text{円} : 30\%、50\text{円} : 30\%、0\text{円} : 40\%)$
 $L' = (100\text{円} : 29\%、50\text{円} : 32\%、0\text{円} : 39\%)$
 どっちが好き？「よく似てるからわからん...」

では、質問をかえて

$L' = (100\text{円} : 29\%、50\text{円} : 32\%、0\text{円} : 39\%)$
 $L'' = (100\text{円} : 45\%、50\text{円} : 0\%、0\text{円} : 55\%)$
 どっちが好き？「随分違うからわかる。 L'' の方が L' より好き」

ならば、あなたは L' よりも L を選ぶべきだ！

$$\therefore [L'' \succ L'] \Rightarrow [L = \frac{1}{16}L'' + \frac{15}{16}L' \succ \frac{1}{16}L' + \frac{15}{16}L' = L']$$

$$100\text{円} : 30\% = (45 \times \frac{1}{16} + 15 \times \frac{15}{16})\%$$

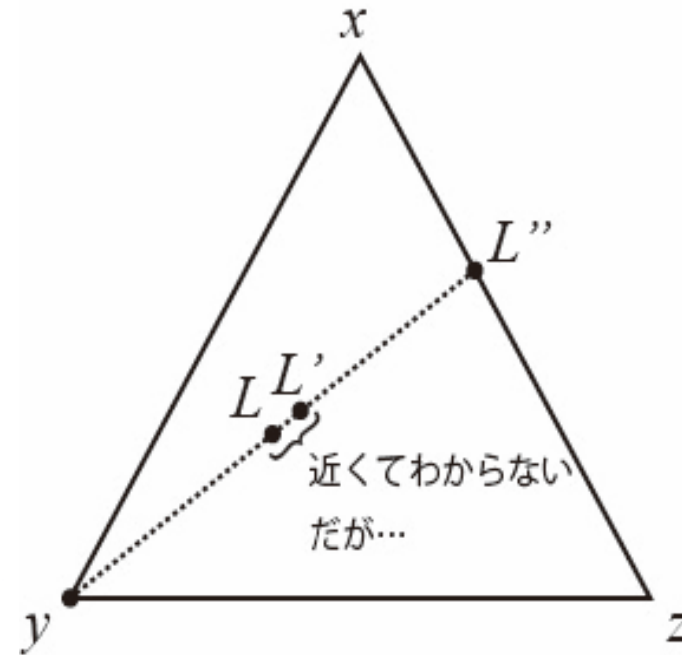
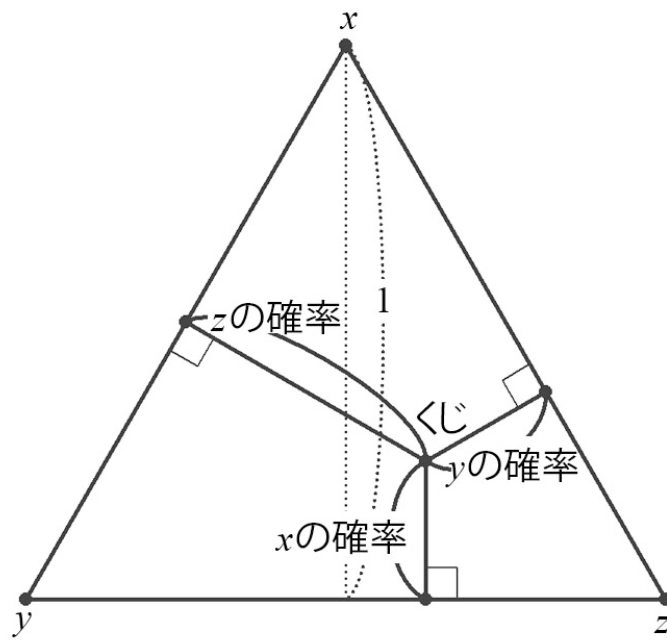
$$50\text{円} : 30\% = (0 + 32 \times \frac{15}{16})\%$$

$$0\text{円} : 40\% = (55 \times \frac{1}{16} + 39 \times \frac{15}{16})\%$$

イメージ図

単純くじ全体集合

独立性 (選好早わかり)



定理（期待効用）：

選択肢全体の集合 X を有限集合とする。単純くじ全体集合 Ψ についての選好順序（完全性と推移性） \succsim が独立性と連続性をもみたすとき、 \succsim は期待効用関数であらわすことができる。つまり、関数 $u: X \rightarrow R$ が存在して、任意のくじ $L \in \Psi$ の効用を、効用の期待値

$$u(L) = \sum_{x \in X} L(x)u(x)$$

であらわすことができる。

証明：期待効用関数の作り方

1番好きな選択肢と1番嫌いな選択肢 \bar{x} と \underline{x} を選び、 $u(\bar{x}) = 1$ 、 $u(\underline{x}) = 0$ と定める。

任意の $p \in (0, 1)$ について、 \bar{x} と \underline{x} についてのくじ $L[p]$ (確率 p で \bar{x} 、確率 $1-p$ で \underline{x}) の効用を

$$u(L[p]) = p$$

と定める。

連続性より、任意の選択肢 $x \in X$ について、必ずある $p = p(x) \in [0, 1]$ が存在して、 \bar{x} と \underline{x} についてのくじ $L[p(x)]$ と x を無差別にできる。よって、

$$u(x) = u(L[p(x)]) = p(x)$$

と定める。

最後に、任意のくじ $L \in \Psi$ について

$$u(L) = \sum_{x \in X} L(x)u(x) = \sum_{x \in X} L(x)p(x)$$

と定めれば期待効用が完成する。

独立性より、これは \succsim の正しい効用関数表現になっていることがわかる。

正線形変換からの独立性 (cf. 正単調変換)

任意の $\alpha > 0$ 、 $\beta \in \mathbb{R}$ について、期待効用関数 u を

$$v = \alpha u + \beta$$

に置き換えても、おなじ選好順序を表す期待効用関数になっている。

期待効用関数は、正単調変換からは独立でない。が、
期待効用による表現にはならないけれども、正単調変換によって
同じ選好順序を意味する効用関数には変換される

10.4. リスク態度

選択肢集合を連続空間とする： $X = [\underline{x}, \bar{x}]$

Monetary Lottery（経済問題の多くはこのケースに該当）

累積分布関数 $L = F : [\underline{x}, \bar{x}] \rightarrow [0, 1]$ ($F(\bar{x}) = 1$, 非減少関数)

$$u(L) = \int_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} u(x) dF(x)$$

あるいは

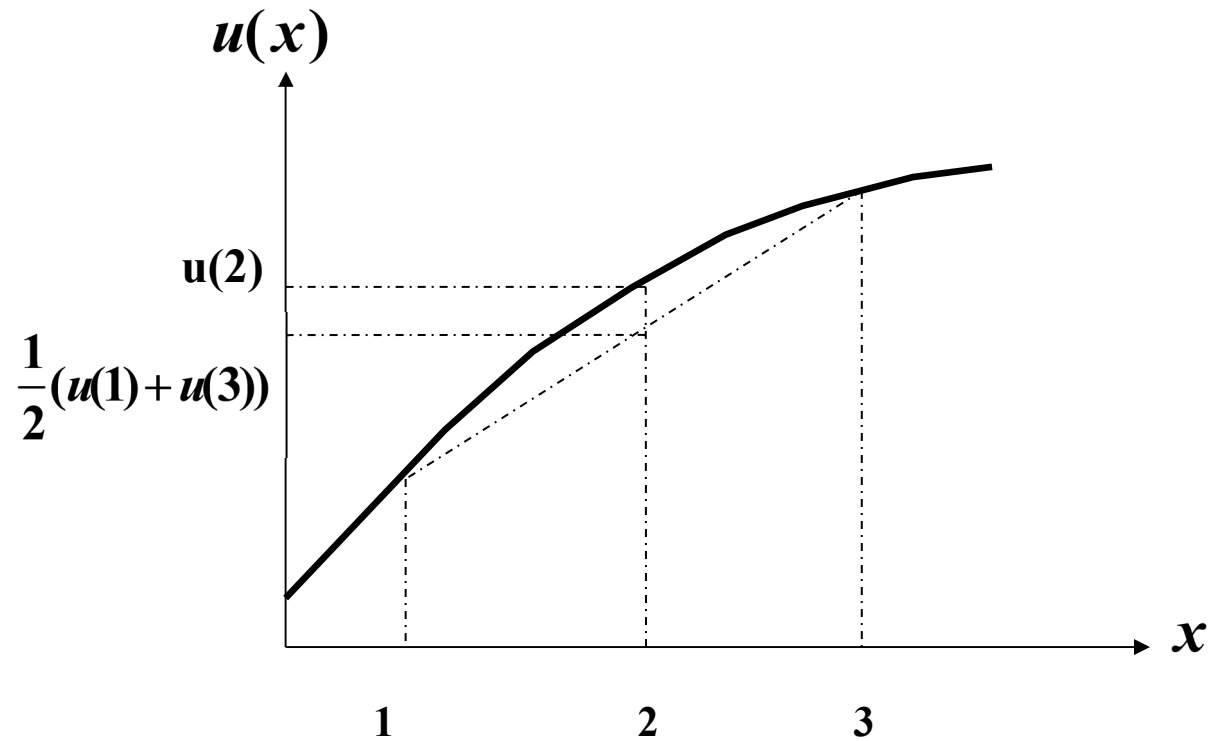
$$u(L) = \int_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} u(x) f(x) dx \quad (\text{確率密度 } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x))$$

* 注意するべきポイント

「期待効用」と「金銭の期待値」を混同しないように！

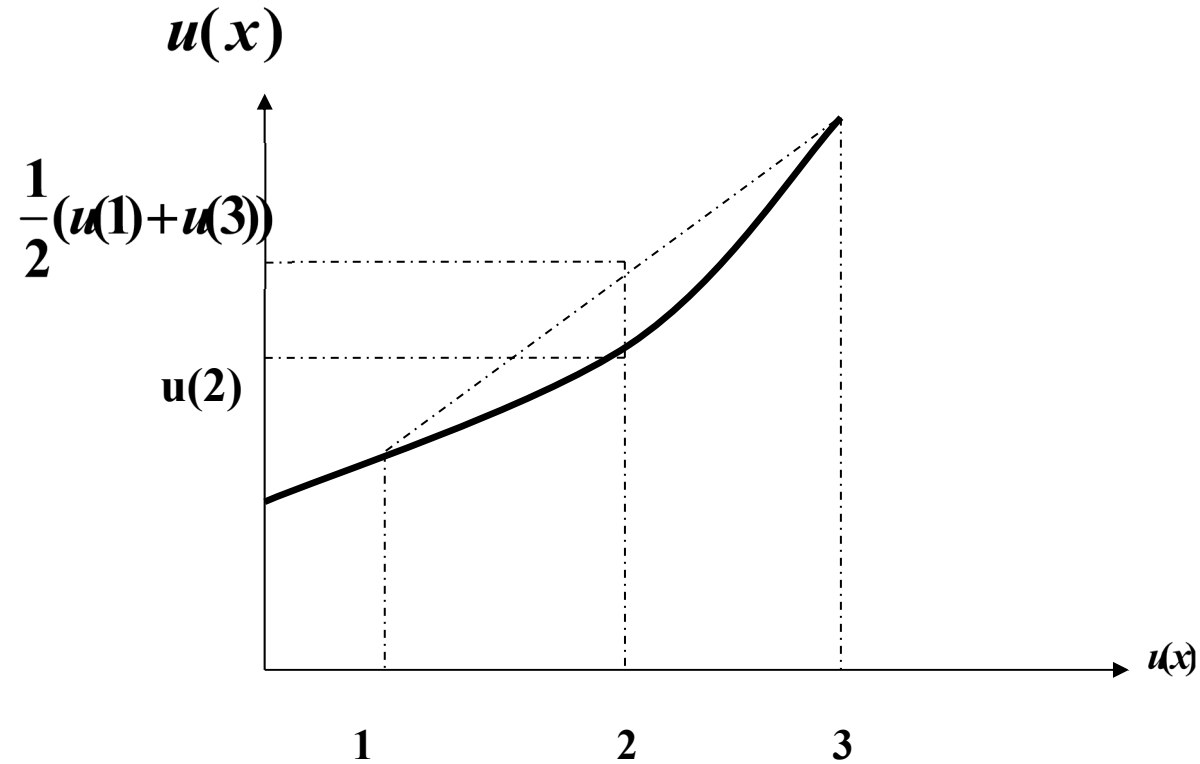
リスク態度 (Monetary Lottery)

- 「リスク回避的」な期待効用関数
- 「リスク愛好的」な期待効用関数
- 「リスク中立的」な期待効用関数

リスク回避的：凹（**concave**）関数

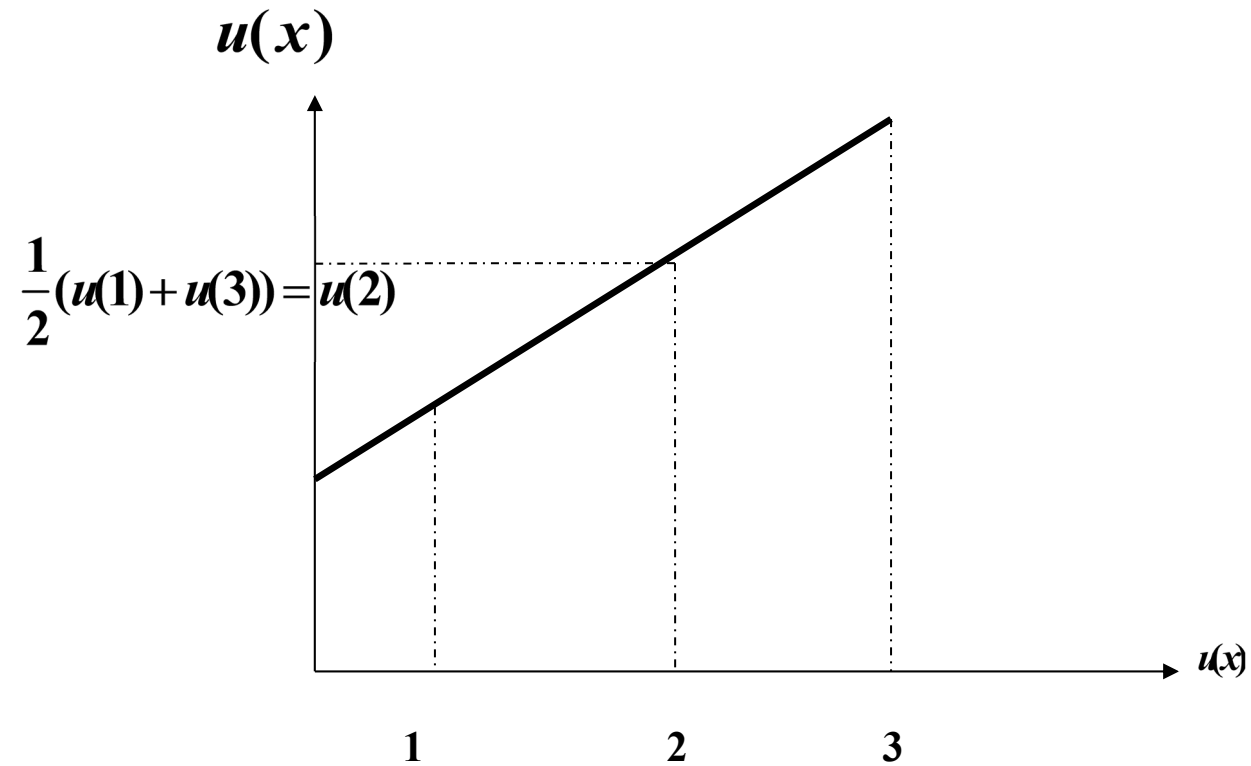
くじに対する期待効用は
くじの期待値（2円）を確実にもらえる場合の効用よりも低い

リスク愛好的：凸 (convex) 関数



くじに対する期待効用は
くじの期待値 (2 円) を確実にもらえる場合の効用よりも高い

リスク中立的：線形 (linear) 関数



くじに対する期待効用は
くじの期待値 (2 円) を確実にもらえる場合の効用と同じ

リスク態度を理解するための例題：

以下のくじが **55** 万円で売られています。
あなたは（とても）リスク回避的です。このくじを買いますか？

景気の悪いケース（確率 **50%**）に **100** 万円
景気のいいケース（確率 **50%**）に **0** 円

答え：あなたのビジネスが

景気の悪いケース（確率 **50%**）に **0** 円
景気のいいケース（確率 **50%**）に **100** 万円

ならば、このくじを買った方がいいかも。（**Think why**）

宿題 (10) を提出すること