2021 年 12 月 24 日、2022 年 1 月 7 日

第 13 章：ゲーム理論と寡占 (2)

二つの代表的なゲーム表現形式

標準形ゲーム：　同時手番（**Simultaneous Moves**）
- 各プレーヤーは戦略を同時に決定
- ナッシュ均衡
- 静学ゲーム

展開形ゲーム：　逐次手番（**Sequential Moves**）
- プレーヤーは順番に行動選択
- 部分ゲーム完全均衡
- 動学ゲーム

動学ゲーム
（行動選択のタイミングを考慮する必要のある状況）には、標準形ゲームではなく
「展開形ゲーム」が使われる

本章のメインテーマ

- 展開形ゲーム（**Extensive-Form Game**）
- 逐次合理性（**Sequential Rationality**）あるいは部分ゲーム完全均衡

展開形ゲームは動学ゲームのためのモデル化の方法

特に重要な行動パターン

- コミットメント（**Remember Chap. 11**）
- **Credible Threat**
- 暗黙の協調

13.1. 展開形ゲーム

Battle of Sexes 再考：静学ゲーム（同時手番）

		男性 ラブコメ（L）	男性 ホラー（H）
女性	ラブコメ（L）	**2 1**	**0 0**
	ホラー（H）	**0 0**	**1 2**

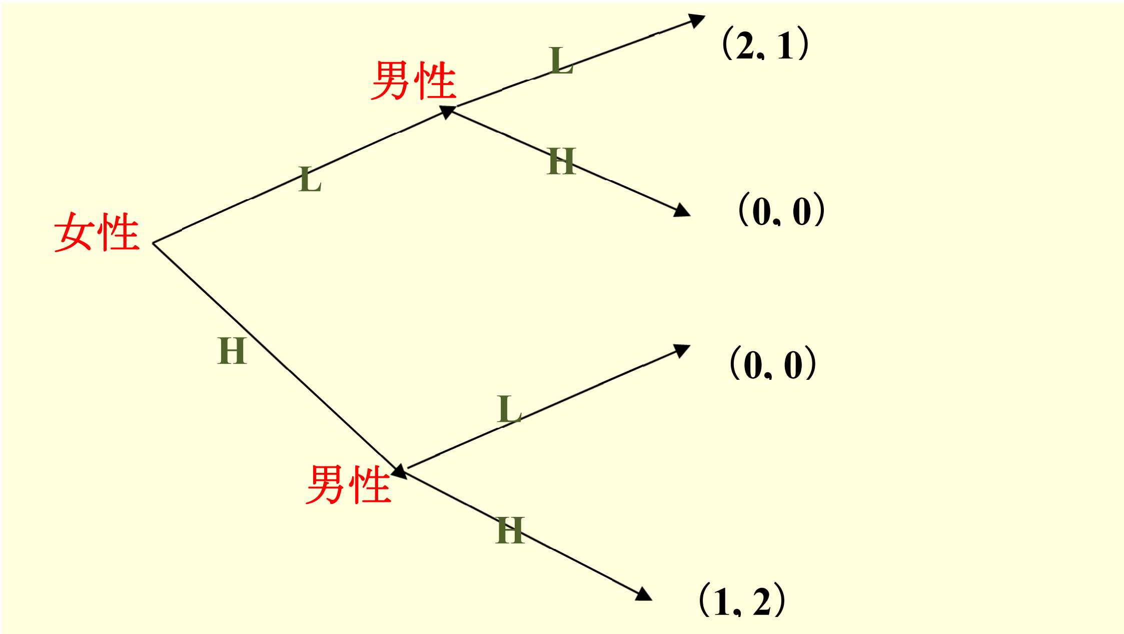
複数の純粋戦略ナッシュ均衡：（**L**、**L**）（**H**、**H**）

ゲームのルールを変えてみよう！

⇒ （女性による）コミットメントの導入

Battle of Sexes：動学ゲーム（逐次手番）

女性先手、男性後手：　女性は場所に「コミットメント」
女性が先に映画館に赴き
携帯で男性に居場所を知らせる
ゲームのルールは変わった！



Battle of Sexes：動学ゲーム（逐次手番）

女性の手番（行動選択のタイミング）はひとつのまま
しかし男性の手番は「ふたつ」に増えている

女性の戦略は **2** 通り：　　**L**　**H**

男性の戦略は４通り：　　**（L, L）　（L, H）　（H, L）　（L, L）**

戦略とは
（徹底された）「行動の計画」のことである

男性の戦略：　　「女性が **L** を選択したならば **L or H**」
「女性が **H** を選択したならば **L or H**」
∴　２×２＝４通りあることになる

動学ゲームを標準形ゲームに還元してみると……

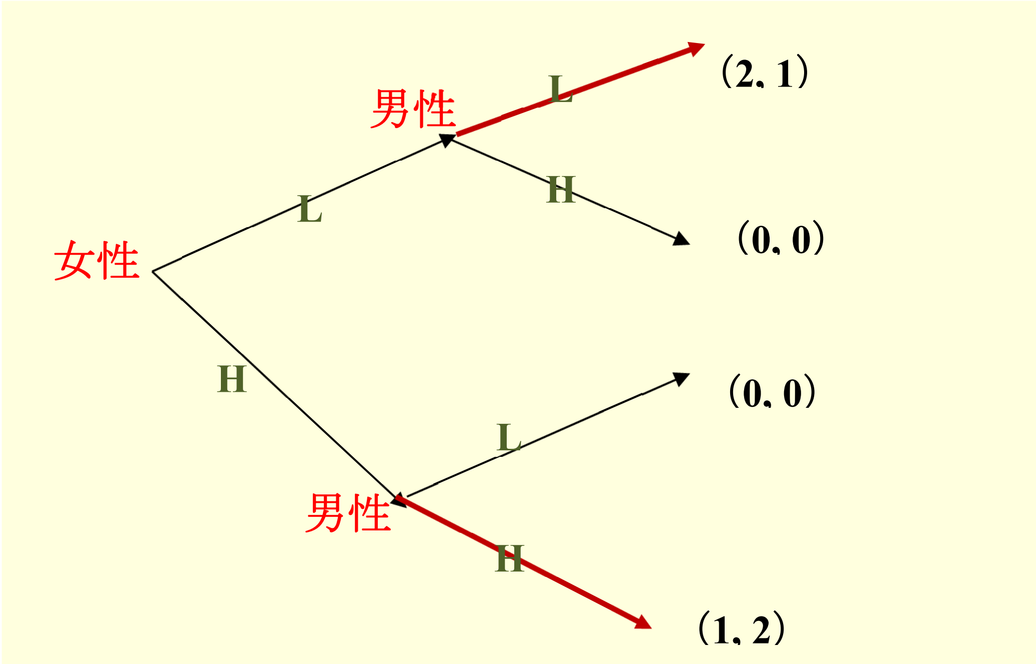
		男性			
		（L、L）	（L、H）	（H、L）	（H、H）
女性	L	2　1	2　1	0　0	0　0
	H	0　0	1　2	0　0	1　2

純粋戦略ナッシュ均衡は三つある：　（L、（L、L））：　ラブコメ映画へ
（L、（L、H））：　ラブコメ映画へ
（H、（H、H））：　ホラー映画へ

（L、（L、H））のみが「理にかなった」ナッシュ均衡である：
Why?

13.2. 逐次合理性（Sequential Rationality）

プレーヤーは「どのタイミングにおいても」合理的であると仮定



男性の戦略は（L、H）のみ逐次合理性をみたす：

（L、L）： 女性が H を選んだのに L を選ぶのは非合理的

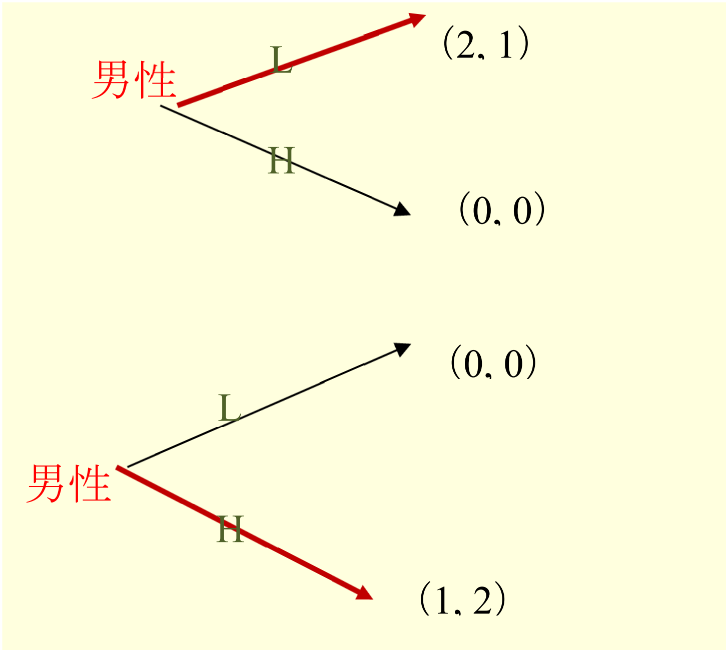
（H、H）： 女性が L を選んだのに H を選ぶのは非合理的

（H、L）： 女性が L を選んだのに H、女性が H を選んだのに L を選ぶのは非合理的

部分ゲーム

展開形ゲームには異なるタイミングから始まる「部分ゲーム」が内包されている
（女性からはじまる（部分）ゲーム１つ、男性からはじまる部分ゲーム２つ）

男性からはじまる二つの「部分ゲーム」

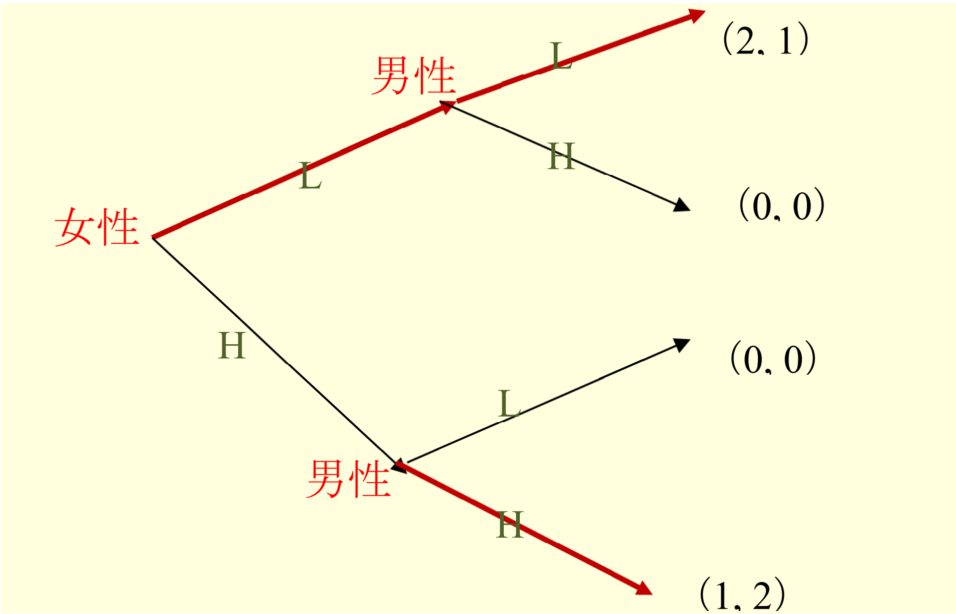


部分ゲーム完全均衡

逐次合理性をみたすナッシュ均衡

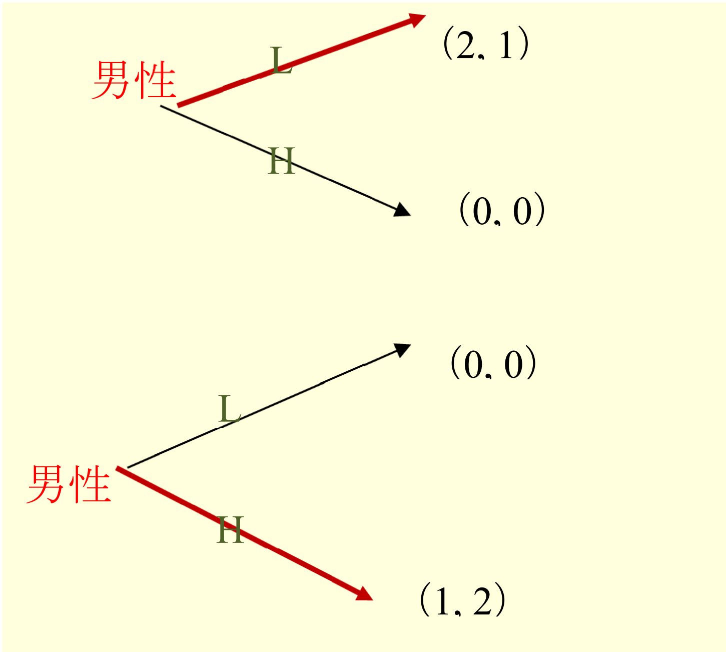
(全ての部分ゲームにおいてナッシュ均衡がプレイされるナッシュ均衡)

ナッシュ均衡を精緻化：部分ゲーム完全均衡は唯一（**L**、（**L**、**H**））のみ



部分ゲーム完全均衡を導く便利な方法
後方帰納法（**Backward Induction**）「後ろから解け」

二つの部分ゲームから解け



部分ゲーム完全均衡は「からおどし（**Incredible Threat**）」を排除する

（H、（H、H））：　ナッシュ均衡だが逐次合理性をみたさない
「ラブコメ」を選ぶと「ホラー」を選ぶぞ
これは「からおどし（**Incredible Threat**）」

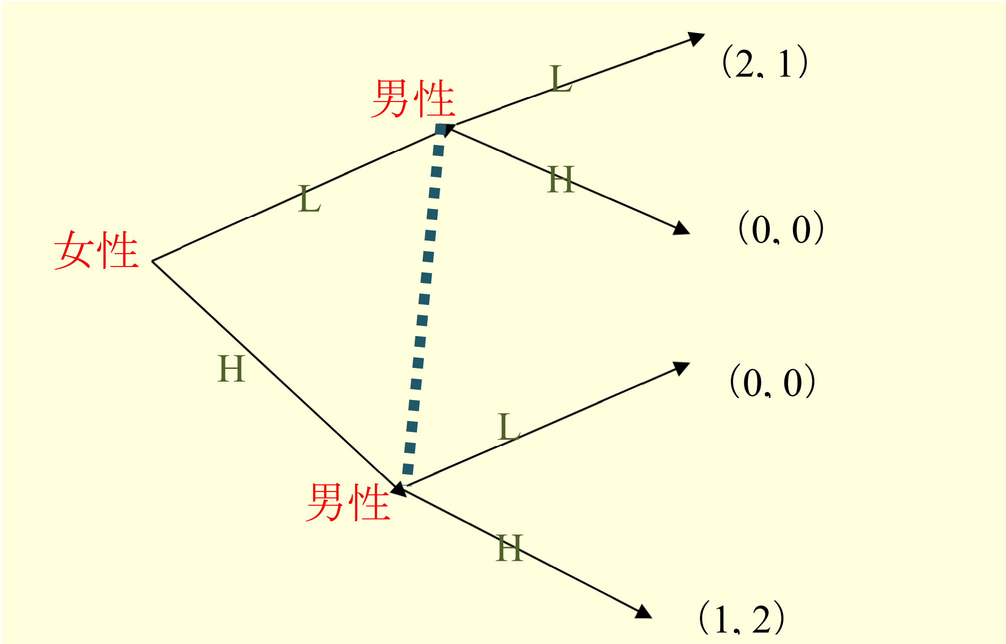
からおどし　計画したことがその場になると実行しない
時間非整合性（**Time Inconsistency**）

逐次合理性：「実行力ある脅し（**Credible Threat**）」だけを考慮
時間整合性（**Time Consistency**）

13.3. 完全情報と不完全情報

完全情報（**Perfect Information**）：　女性がどっちの映画館に行ったかが男性に伝わる

不完全情報（**Imperfect Information**）：　伝わらない（携帯がつながらない）



情報集合（**Information Set**）：男の手番ではどちらの **Nodes** にいるか区別できない
どちらの **Node** でも同じ選択にならざるを得ない

不完全情報の動学ゲームを標準形ゲームに還元してみると……

		男性			
		（L、L）	（L、H）	（H、L）	（H、H）
女性	L	2　1	2　1	0　0	0　0
	H	0　0	1　2	0　0	1　2

不完全情報の動学ゲームを標準形ゲームに還元してみると……

		男性	
		L	H
女性	L	2　1	0　0
	H	0　0	1　2

同時手番と同じ標準形ゲーム：

「同時手番」、「女性先手男性後手の不完全情報ゲーム」、
「男性先手女性後手の不完全情報ゲーム」はみな
同じ標準形ゲームに還元される

コミットメントは
完全情報の動学ゲームにおいてのみ **Credible** である

先に「ラブコメ映画館」にいっても、男性にそれが伝わらなければ効果がない

先に「ラブコメ映画館」にいっても、簡単に「ホラー映画館」に移動できてしまえば効果がない

13.4. ゲーム理論による寡占（複占）市場分析

第 12 章 6 節： 静学ゲーム（同時手番）
クールノー数量競争
ベルトラン価格競争

本節： 動学ゲーム（逐次手番）
先手と後手： シュタッケルベルク数量競争
投資と競争： 立地と価格の動学ゲーム

初期の行動決定がコミットメント機能になる

13.4.1. シュタッケルベルク複占

クールノー複占の「ゲームのルール」を変える：
企業１がコミットメント

先手（企業１）： 先に供給量を決定
後手（企業２）： 先手の供給量を観察してから供給量を決定
それ以外はクールノーモデルと同じモデル

企業１（先手）の戦略： $s_1 \in [0,1)$
企業２（後手）の戦略： 企業 **2** の手番は無数：部分ゲームは無数にある
企業１の選択 $s_1 \in [0,1)$ ごとに企業 **2** の手番がある

$$\therefore \quad s_2 : [0,1) \to [0,1)$$

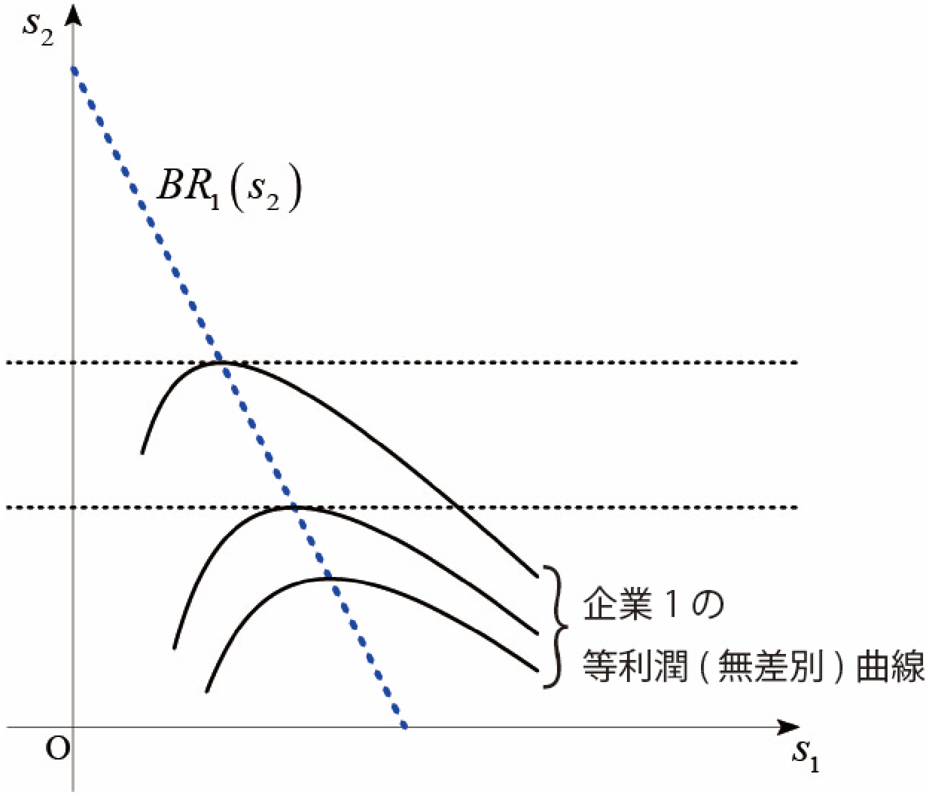
企業１の供給が $s_1 \in [0,1)$ の場合
企業２の供給は $s_2(s_1) \in [0,1)$ ： s_1 に依存

部分ゲーム完全均衡をもとめてみよう！
後方帰納法：後手から解け

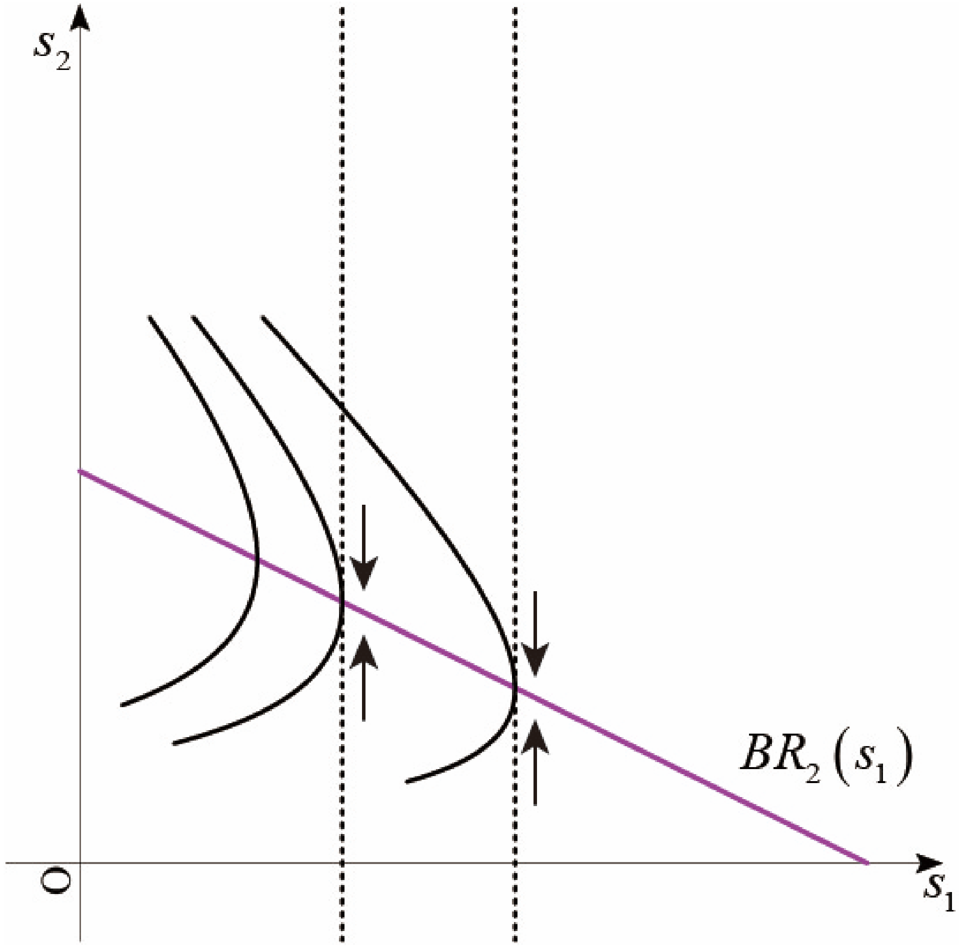
企業２は企業１（先手）が選択した供給量 $s_1 \in [0,\infty)$ に対する
最適反応を選択する：

$$s_2(s_1) = BR_2(s_1) = \frac{1 - s_1}{2}$$

企業１の等利潤曲線群（Think why）



企業２の等利潤曲線群



↑最適反応曲線：企業２の最適戦略

先手は後手の反応を読みこめ！

企業１（先手）は

「企業２（後手）が最適反応 $s_2(s_1)=BR_1(s_1)$ を選択する」ことを読み込む

「自社の供給量を増やすと相手は供給量を減らす（戦略的代替）」

$$\max_{s_1 \in [0,1]} \{1 - s_1 - BR_2(s_1)\} s_1$$

一階条件：
$$\frac{\partial}{\partial s_1}\{1 - s_1 - \frac{1 - s_1}{2}\} s_1 = 0$$

$$\therefore \quad s_1 = 1/2$$

$$s_2 = BR_2(1/2) = 1/4$$

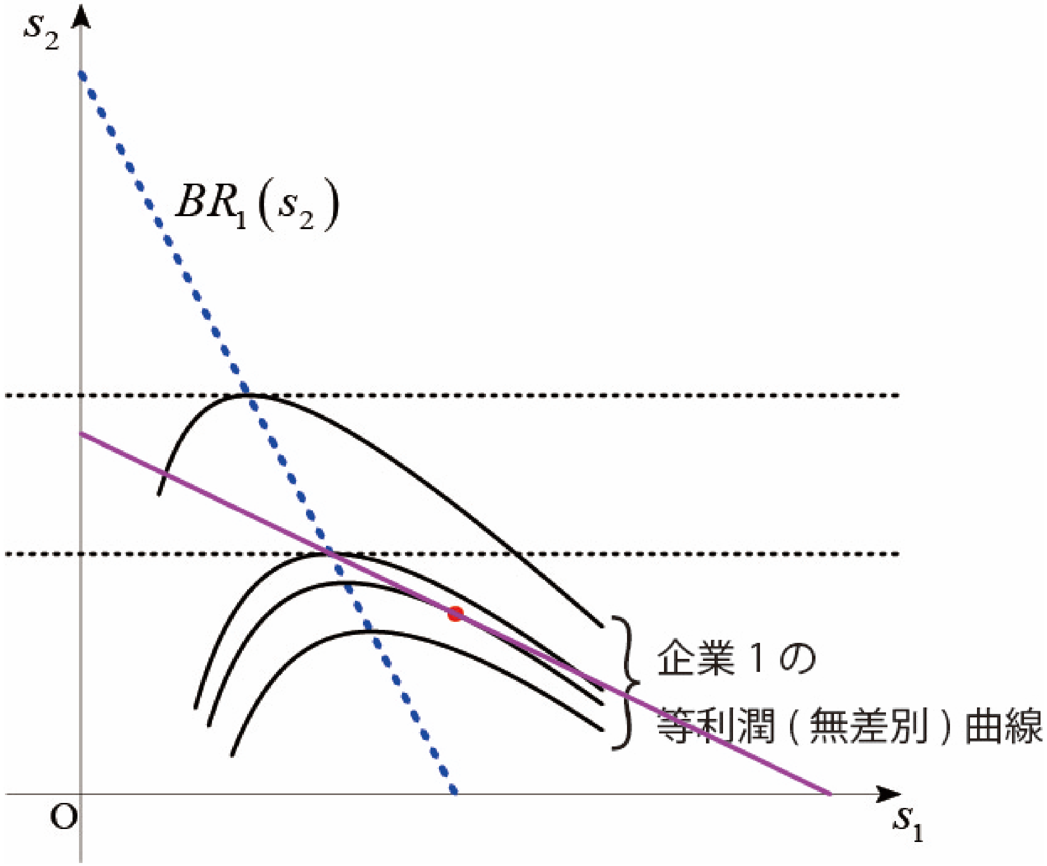
部分ゲーム完全均衡は（先手の戦略 $1/2$, 後手の戦略 BR_2）

均衡における供給量は先手 $1/2$, 後手 $1/4$

総供給量 $1/2 + 1/4 = 3/4$

部分ゲーム完全均衡（Think why）

先手企業１は、赤ライン（後手の最適反応曲線$\boldsymbol{BR_2(s_1)}$）上で一番利潤が高くなる点を選ぶ



先手によるコミットメント効果

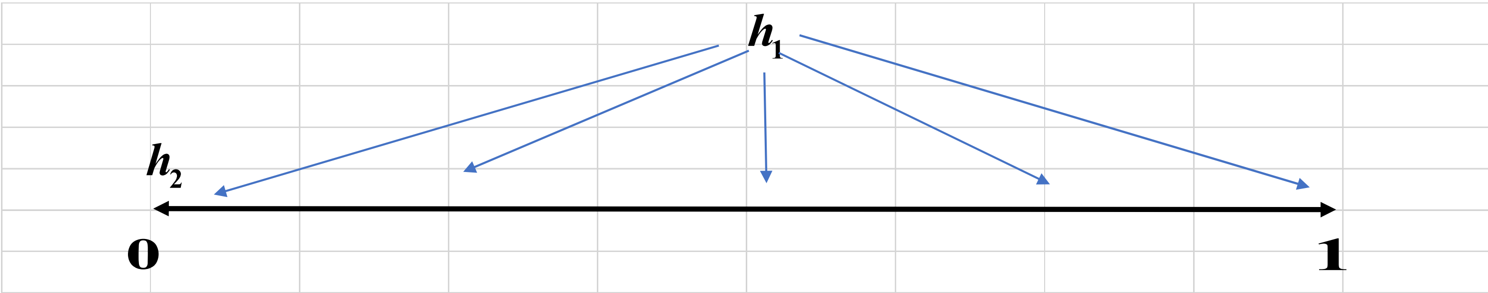
$$s_1 = 1/2 > 1/3$$

企業１は
「私がクールノー均衡より多めの供給（$1/2 > 1/3$）にコミットすれば
企業２にとってクールノー均衡より少なめに供給する（$1/4 < 1/3$）のが合理的である」
ことを読み込むことで、利益を高める

価格はクールノー均衡と比べて $1/3$ から $1/4$ にダウンする（消費者にメリット）
企業１の利潤は $1/9$ から $1/8$ にアップ
（企業２の利潤は $1/9$ から $1/16$ にダウン）

企業１は、企業２と生産技術は同じなのに、先手にコミットする（ゲームのルール）を変えることによって、より有利になれる。
供給量が増え消費者にメリット：しかし企業２が退出する事態になると消費者にデメリット

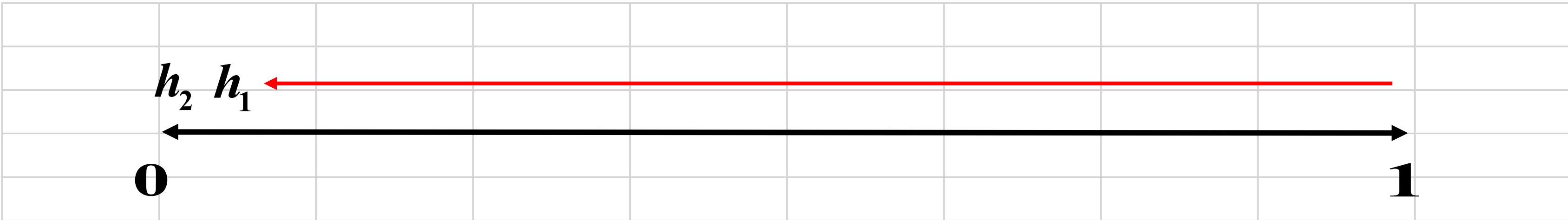
13.4.2. 立地と価格の動学ゲーム（言葉のみの説明）



消費者は区間 **[0,1]** に一様分布している
企業２は地点０に店を構えている（立地地点０固定）
企業１が参入しようとしている
企業１は区間 **[0,1]** のどの地点に立地するのがいいか？

当初の案：
地点０のすぐ右隣りに立地しよう！

お客さんを全部取ることができる
（右側に位置する消費者はみな企業１の店舗に来る）



はなれた立地は製品差別化を意味する

差別化の余地が十分にあるのにもかかわらず
企業１はあえてライバルと同じ立地（同質財）を選んで
市場のシェアを占有しようと考えた
（**cf.** 独占的競争）

しかしこの案は却下：**Why?**

新しい案：
地点１に立地しよう！

企業１は、企業 **2** との戦略的相互依存を
以下の動学ゲームとして知覚した

第 **1** 期：　企業１は立地 $h_1 \in [0,1]$ を決める。
第 **2** 期：　企業１と企業 **2** は、自社財価格 $p_1 \in [0,\infty)$、$p_2 \in [0,\infty)$
を同時に決める価格競争をする（不完全代替財のベルトラン競争）

地点０に立地するのは最悪：　激しい価格競争
利益は期待できない

地点０から離れた場所がベスト：　価格競争は緩和
協調関係成立
製品差別化促進（**ex.** 独占的競争）

13.4.3. ビジネス戦略の四つの類型

ビジネス戦略：　　コミットメントとしての初期投資決定
（製品差別化、**R&D** 投資、他市場への投資など）

競争戦略：　　価格競争（ベルトラン風）、数量競争（クールノー風）

「威嚇（Deterrence）か和解（Accommodation）か」

Top Dog	初期投資を増やして相手の利得を下げる
Fat Cat	初期投資を増やして相手の利得を上げる
Puppy Dog	初期投資を減らして相手の利得を上げる
Lean and Hungry Look	初期投資を減らして相手の利得を下げる

	タフ投資（相手にダメージ）	ソフト投資（相手にメリット）
戦略的代替	**Top Dog**	**Lean and Hungry Look**
戦略的補完	**Puppy Dog**	**Fat Cat**

シュタッケルベルク複占：　戦略的代替
タフ投資
先手は「**Top Dog**」

立地と価格の動学ゲーム：　戦略的補完
タフ投資（相手に近づくと相手にダメージ）
企業１は「**Puppy Dog**」

他市場から参入（数量競争）：　戦略的代替
ソフト投資（他市場での投資、範囲の不経済性）
新規企業は「**Lean and Hungry Look**」

他市場から参入（価格競争）：　戦略的補完
ソフト投資（他市場での投資、範囲の不経済性）
新規企業は「**Fat Cat**」

13.5. 繰り返しゲーム（Repeated Game）

囚人のジレンマ再考

	c	d
c	1　1	-1　2
d	2　-1	0　0

優位戦略プロファイルは（d,d）である
しかし（c,c）は（d,d）からのパレート改善になる

「ゲームのルール」を変えることによって（c,c）が実現できるかもしれない
どうやって？

長期的関係と暗黙の協調

「囚人のジレンマが長期にわたって継続されている」
囚人のジレンマの「繰り返しゲーム」をプレイしている

この場合には
「（ｃ、ｃ）が繰り返しプレイされる」行動パターンが
部分ゲーム完全均衡によって実現されうる：
「暗黙の協調」が成立

トリガー戦略

繰り返しゲームにおける代表的な戦略

第1期：　c を選択

任意の $t \geq 2$ 期：　過去にずっと (c,c) がプレイされていれば c を選択

一度でも (c,c) 以外がプレイされていれば d を選択

割引ファクター $\delta \in (0,1)$

毎期 $t \in \{1,...,T\}$ に利得 $u_i(a(t))$ を獲得

繰り返しゲームの利得は「割引現在価値の和」：

$$u_i(a(1)) + \delta u_i(a(2)) + \cdots + \delta^{t-1} u_i(a(t)) + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(a(t))$$

割引ファクター $\delta \in (0,1)$ が十分大きい場合
トリガー戦略プロファイルは部分ゲーム完全均衡になる

$\therefore$ ずっと (c,c) がプレイ

トリガー戦略にしたがえば　$1+\delta+\delta^2+\cdots=\dfrac{1}{1-\delta}$

d を選択すると以降 (d,d) の繰り返し　$2+\delta\times 0=2$

割引ファクターが $\delta \geq 1/2$ ならば　$\dfrac{1}{1-\delta}\geq 2$

$\therefore$ トリガー戦略にしたがったほうがいい

d を選択すると今期の利得は高まる（１から２）が

将来利得機会を失う（$\dfrac{\delta}{1-\delta}$からゼロ）ことになる

将来利得を重視する（割引ファクターが高い：$\delta \geq 1/2$）プレーヤーであれば

トリガー戦略にしたがうインセンティブをもつ

違法カルテル

ライバル企業同士がカルテルを結ぶことは違法行為

∴　明示的な契約書を交わすことなく「暗黙の協調」を企てる

クールノー複占が無限回繰り返される状況で
トリガー戦略プロファイルを考える

- 第１期、各企業は $1/4$ ずつ供給、独占価格 $1/2$ 成立
- 以降、独占価格が成立し続けるかぎり、各企業は $1/4$ ずつ供給
- 一度でも独占価格 $1/2$ が成立しなければ、以降 $1/3$ ずつ供給
  協調からクールノー均衡の繰り返しへ

カルテルにしたがうと：　　毎期 $(1-1/2)\,1/4 = 1/8$ の利潤

カルテルを破ると：　　今期　　$\max_x (1-1/4-x)x = 9/64$　（$x = 3/8$）

　　　　　　　　　　　次期以降　　$(1-1/3-1/3)\,1/3 = 1/9$

カルテル成立条件：　　$\dfrac{1}{(1-\delta)8} \geq \dfrac{9}{64} + \dfrac{\delta}{(1-\delta)9}$　　∴　　$\delta \geq 9/17$

繰り返しゲームの分析：
経済組織や経済制度の理解に大きな貢献

信用と評判
企業文化
法制度ビジネス
村八分
スケープゴート
フォーク定理
…………

補論１：ゲーム理論と行動経済学

ゲーム理論のモデルを実験してみると
理論とは大きく乖離した実験結果が得られることがある

金銭的な利得以外の要因（心理的、倫理的）に
行動選択が左右されている

実験結果を参考にして
金銭的動機以外の要因を考慮したプレーヤーのモデルを開発
→　行動ゲーム理論

例：最後通牒ゲーム（パートナーシップと交渉）

山田さんは**1000**万円のビジネスチャンスを発見した。
しかし鈴木さんと共同でないとビジネスを実行できない。
そこで山田さんは鈴木さんに
「**1000**万円のうち**X**万円を鈴木さんの分け前にするので協力してほしい」
と提案した。

鈴木さんは「受け入れる」か「拒否するか」を選択する。
拒否するとビジネスチャンスは消滅する。
受け入れると鈴木さんは**X**万円、山田さんは（**1000**－**X**）万円獲得できる。

あなたが山田さんなら、**X**をいくらにする？
あなたが鈴木さんなら、いくら以上なら受け入れる？
二人が合理的ならばどのように行動する？

ゲーム理論による説明の一例：

プレーヤーは金銭的利益のみに関心があると仮定する

部分ゲーム完全均衡：

鈴木さんは$\boldsymbol{X > 0}$であれば必ず「受け入れる」
山田さんは$\boldsymbol{X \approx 0}$円を提示し、鈴木さんはそれを受け入れる

これは実際の人間の行動を正しく記述するものだろうか？
ラボ実験してたしかめよう！

実験結果は理論とあまり整合的でないことがある

かなりの人が山田さんの立場において「５０％に迫る **X**」を選択した
かなりの人が鈴木さんの立場において低い **X** に対して「拒否」を選択した

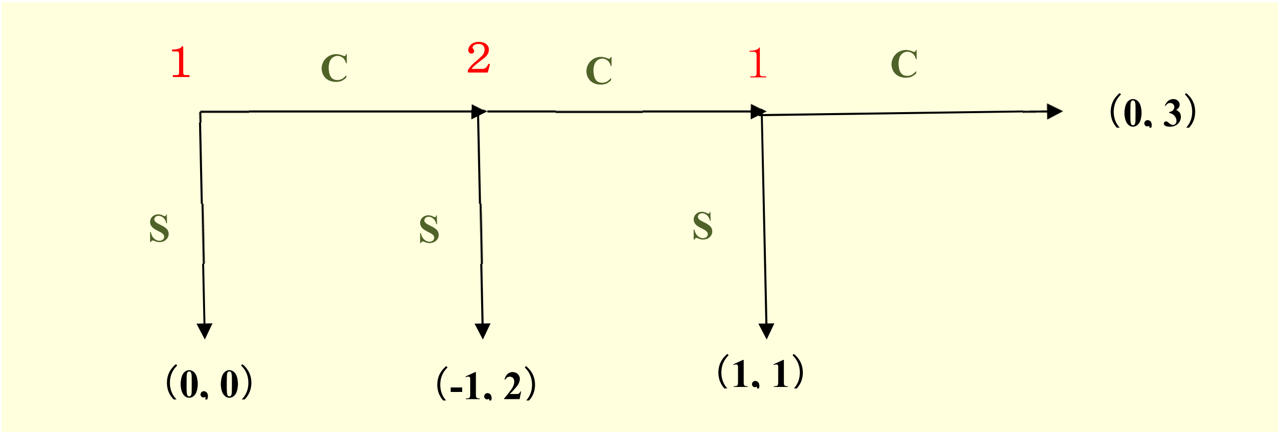
Think Why：

山田さんはからおどしにひっかかった？

鈴木さんは不平等を回避したかった（不平等回避：**Inequality Aversion**）？

鈴木さんは山田さんが低い **X** を提示したことに立腹した（互恵性 **: Reciprocity**）！
「鈴木さんに X = **20%** 以上はお渡しできない裏事情があります」X = **20** を受け入れることに**……**

補論２：戦略とは
（徹底された）「行動の計画」のことである：再考



プレーヤー１の戦略は **4** 通り：　**(S, S), (S, C), (C, S), (C, C)**
これは常識的な意味での行動計画（**3** 通り）とは違う：**S, (C, S), (C, C)**

(S, S), (S, C):　自分が **S** を最初に選択するにもかかわらず、本来の計画にはない「**C** を最初に選択した後のプレーヤー１の行動選択」を盛り込んでいる。**Why?**

∵　「**C** を最初に選択した後のプレーヤー１の行動選択」は相手プレーヤー２が戦略（**S** か **C** か）を決める際にはとても有用な情報である。**Think Why**

第 **13** 章終わり

宿題（13）を提出すること

追記：部分ゲーム完全均衡の考え方に慣れよう

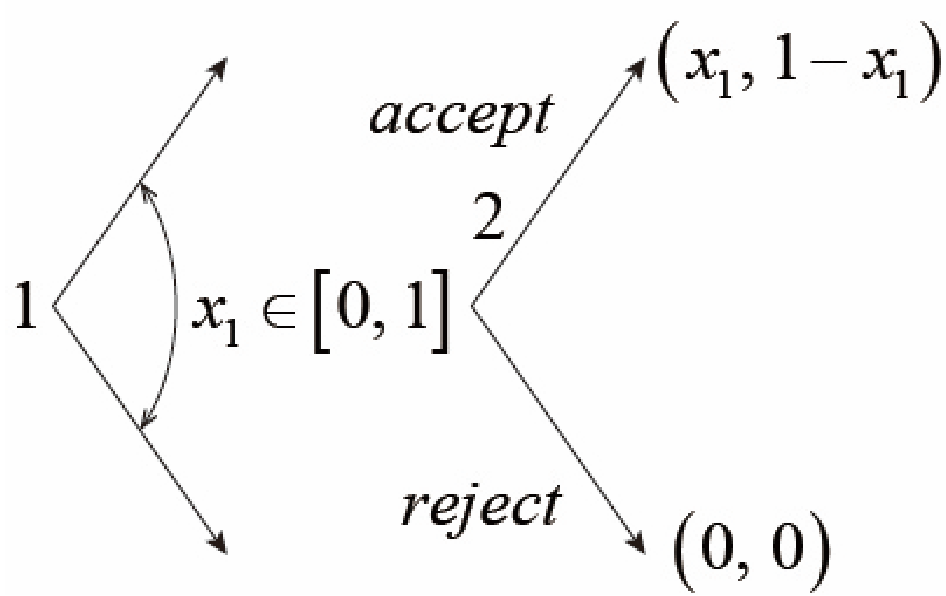
最後通牒ゲーム再検討：
逐次交渉ゲーム

理性的、合理的な交渉の手続きを考えよう

	最後通牒ゲーム：	先手の提案を後手が拒否すると交渉決裂（先手有利）
⇒	逐次交渉ゲーム：	立場を入れ替えて再交渉
		合意するまで再交渉を続けましょう
		先手後手の有利不利の小さい環境で
		どのような合意形成が可能か？
		契約終結、立法の基礎理論に

cf.　Hawk-Dove Game：理性的でない交渉
有利不利の関係がナッシュ均衡になる

最後通牒ゲーム



部分ゲーム完全均衡：　プレーヤー２は（プレーヤー１の取り分についての）
提案 $x_1 \in [0,1]$ に関係なく「**Accept**」
プレーヤー１は $x_1 = 1$ を選択（**cf.** 行動ゲーム理論）

＊本文では X を後手の取り分としていたが、ここでは x_k, $k = 1,2,3...$ をプレーヤー１の取り分とする

２段階逐次交渉

二人が交互に提案（**Alternating Offer**）
合意が遅れると損失発生：割引ファクター $\boldsymbol{\delta \in (0,1)}$，時間選好

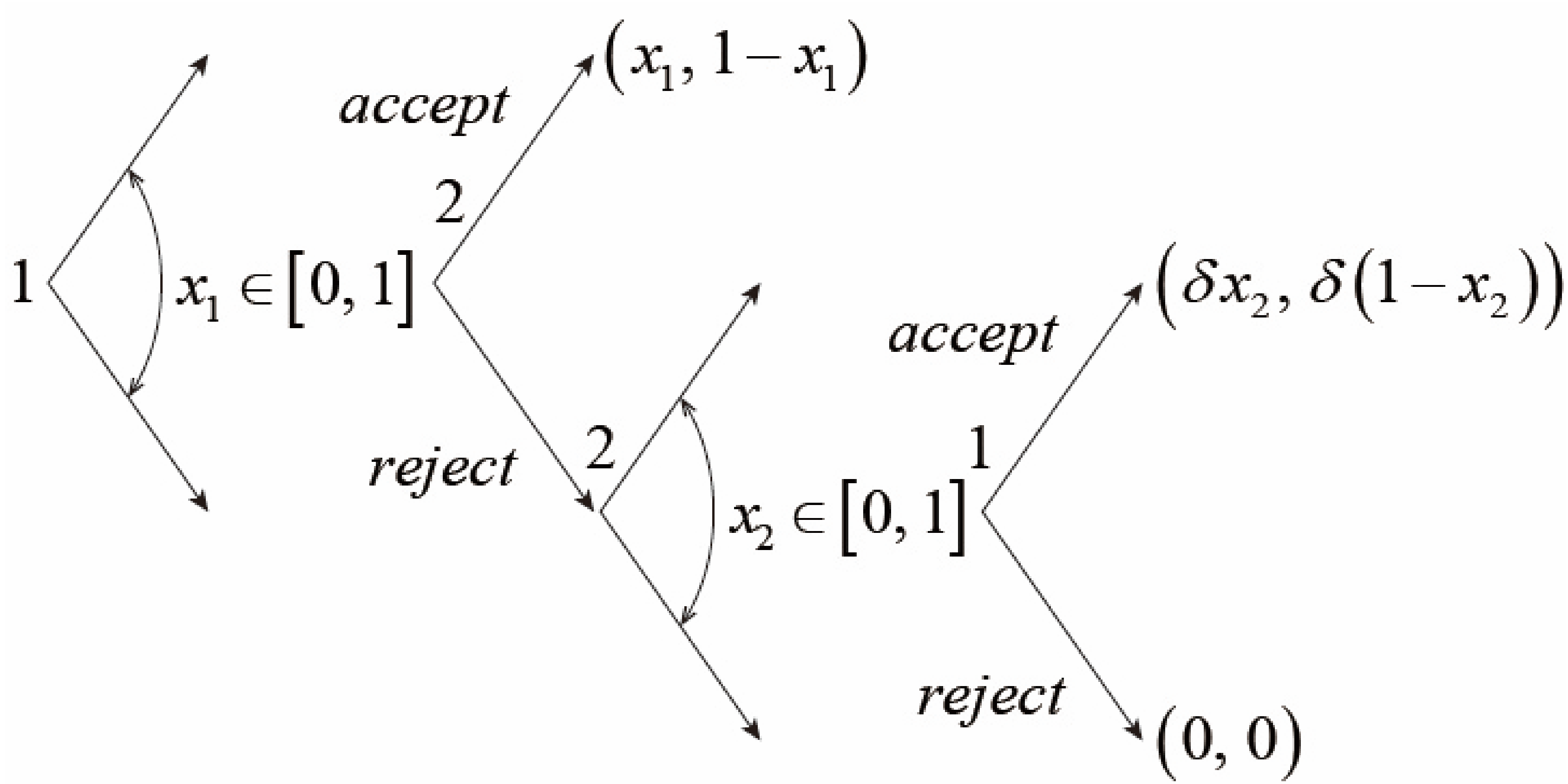
Stage 1： 先手プレーヤー１： $\boldsymbol{x_1 \in [0,1]}$を提案
後手プレーヤー２： 「**Accept**」すると終了 利得ベクトル $\boldsymbol{(x_1, 1-x_1)}$
「**Reject** 」すると **Stage 2** へ！

Stage 2： 全利益が１から $\boldsymbol{\delta \in (0,1)}$ へダウン（交渉長引くとコスト発生）

先手プレーヤー２： $\boldsymbol{x_2 \in [0,1]}$を提案（最後通牒）
後手プレーヤー１： 「**Accept**」で終了： 利得ベクトル

$$\boldsymbol{(\delta x_2, \delta(1-x_2))}$$

「**Reject** 」で終了： 利得ベクトル $\boldsymbol{(0,0)}$



交渉を左右する二要因：　　　最後通牒（プレーヤー２）
割引ファクター $\delta \in (0,1)$ ：交渉が長引くとコスト

部分ゲーム完全均衡（後方帰納法で）

Stage 2: 後手プレーヤー１ すべての提案 $x_2 \in [0,1]$ を「**Accept**」： **Think why.**

先手プレーヤー２ $x_2 = 0$ を選択： **Think why**

∴ 利得ベクトル $(0, \delta)$

Stage 1: 後手プレーヤー２ $1 - x_1 \geq \delta$ を「**Accept**」： **Think why.**

$1 - x_1 < \delta$ なら「**Reject**」して **Stage2** へ： **Think why.**

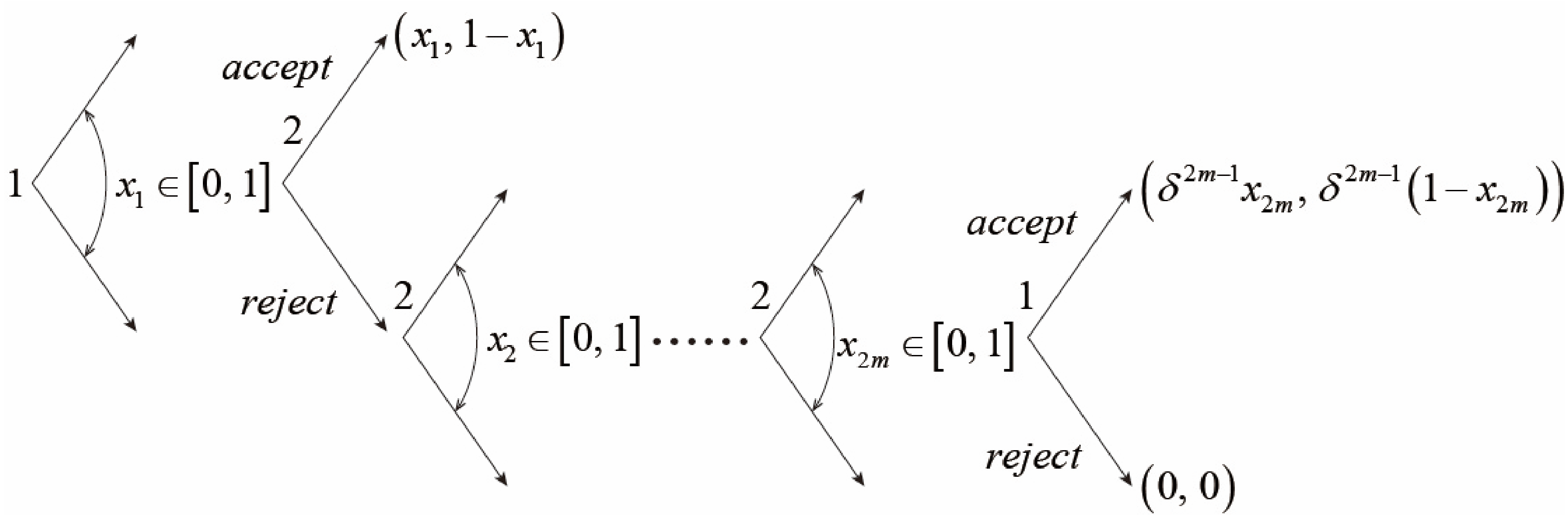
先手プレーヤー１ $x_1 = 1 - \delta$ を選択： **Think why.**

Stage 1 にて交渉成立：利得ベクトル $(1-\delta, \delta)$ が実現

合理的なプレーヤー１は、交渉が長引くのを避けて、即合意できる提案をした

割引ファクター δ が高い（あまり割り引かれない）場合、プレーヤー２の最後通牒の効果が強いので、プレーヤー２に有利な合意になる

多段階（2m）逐次交渉



全部で **$2m$ Stages:** **Stage $2m$**（**final stage**）にてプレーヤー２が最後通牒

割引ファクター $\boldsymbol{\delta \in (0,1)}$**:** **Stage $t \in \{1,...,2m\}$** における（総）利益は $\boldsymbol{\delta^{t-1}}$

部分ゲーム完全均衡（後方帰納法で）

Stage $2m$:　後手プレーヤー１　すべての提案 $x_{2m} \in [0,1]$ を「**Accept**」

先手プレーヤー２　$x_2 = 0$ を選択

利得ベクトル　$(0, \delta^{2m-1})$

Stage $2m-1$:　後手プレーヤー２　$1 - x_{2m-1} \geq \delta$（$\delta^{2m-2}(1 - x_{2m-1}) \geq \delta^{2m-1}$）なら「**Accept**」

$1 - x_{2m-1} < \delta$ なら「**Reject**」して **Stage** $2m$ へ

先手プレーヤー１　$x_{2m-1} = 1 - \delta$ を選択

利得ベクトル　$(\delta^{2m-2} - \delta^{2m-1}, \delta^{2m-1})$

Stage $2m-2$:　後手プレーヤー１　$x_{2m-2} \geq \delta(1-\delta)$（$\delta^{2m-3} x_{2m-2} \geq \delta^{2m-2}(1-\delta)$）なら「**Accept**」

$x_{2m-2} < \delta(1-\delta)$ なら「**Reject**」して **Stage** $2m-1$へ

先手プレーヤー２　$x_{2m-2} = \delta(1-\delta) = \delta - \delta^2$ を選択

利得ベクトル　$(\delta^{2m-2} - \delta^{2m-1}, \delta^{2m-3} - \delta^{2m-2} + \delta^{2m-1})$

以下同様にして、任意の $t \in \{1,...,m-1\}$ にて、

Stage $2t$ $$x_{2t} = \delta - \delta^2 + \delta^3 - \cdots - \delta^{2m-2t}$$

Stage $2t-1$ $$x_{2t-1} = 1 - \delta + \delta^2 - \cdots - \delta^{2m-2t+1}$$

よって

Stage 1

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \delta + \delta^2 - \cdots - \delta^{2m-1} \\ &= (1 + \delta^2 + \cdots \delta^{2(m-1)}) - \delta(1 + \delta^2 + \cdots + \delta^{2(m-1)}) \\ &= (1-\delta)\frac{1-\delta^{2m}}{1-\delta^2} = \frac{1-\delta^{2m}}{1+\delta} \end{aligned}$$

Stage 1 にて即交渉成立

プレーヤー１が $x_1 = \dfrac{1-\delta^{2m}}{1+\delta}$、プレーヤー２が $1 - x_1 = \dfrac{\delta + \delta^{2m}}{1+\delta}$ を獲得

$m \to \infty$：

最後通牒（**final stage** の効果）を消すと**…**

$$\lim_{m\to\infty} x_1(m) = \lim_{m\to\infty} \frac{1-\delta^{2m}}{1+\delta} = \frac{1}{1+\delta}$$

$$1 - \lim_{m\to\infty} x_1(m) = 1 - \frac{1}{1+\delta} = \frac{\delta}{1+\delta} \quad (< \frac{1}{1+\delta})$$

Stage1 の先手が有利、しかし**……**

摩擦のない再交渉（交渉継続のコストほぼゼロ）：

交渉決裂しても即再交渉開始できると仮定すると（$\delta \uparrow 1$）

$$\lim_{\delta \uparrow 1} \lim_{m \to \infty} x_1(m,\delta) = \lim_{\delta \uparrow 1} \frac{1}{1+\delta} = \frac{1}{2}$$

最後通牒や割引ファクターによる交渉プロセスの制約がない場合
合理的なプレーヤーは一意の部分ゲーム完全均衡の結果として
「平等な分配」
に合意

「フェアな交渉手続きなら分配もフェア」

（やや上級）無限階逐次交渉

交渉を無限に継続できると仮定
永遠に **Reject** し続けた場合の　　利得ベクトルは（０，０）

以下の純粋戦略プロファイルを考えよう：

奇数ステージ $t \in \{1,3,5,\ldots\}$ にて：

プレーヤー１は常に $x_t = \dfrac{1}{1+\delta}$ （**1** の取り分）を提示

プレーヤー２は提示が $\dfrac{1}{1+\delta}$ 以下ならばその時のみ **Accept**

偶数ステージ $t = \{2,4,6,\ldots\}$ にて：

プレーヤー２は常に $x_t = \dfrac{\delta}{1+\delta}$ （**1** の取り分）を提示

プレーヤー１は 提示が $\dfrac{\delta}{1+\delta}$ 以上ならばその時のみ **Accept**

この時ステージ１にてプレーヤー１は $\dfrac{1}{1+\delta}$ を提示しプレーヤー２は即 **Accept**

これは部分ゲーム完全均衡になっている

奇数ステージ：

- プレーヤー１は $\frac{1}{1+\delta}$ より低い提示をすると **Accept** されるが明らかに損
- プレーヤー１は $\frac{1}{1+\delta}$ より高い提示をすると **Reject** され明らかに損
- プレーヤー２は $1-\frac{1}{1+\delta}=\frac{\delta}{1+\delta}$ 以上の分け前を **Reject** すると次期に $1-\frac{\delta}{1+\delta}=\frac{1}{1+\delta}$ を獲得するが δ で割り引くので損
- プレーヤー２は $1-\frac{1}{1+\delta}=\frac{\delta}{1+\delta}$ 未満の分け前を **Accept** すると次期に $1-\frac{\delta}{1+\delta}=\frac{1}{1+\delta}$ を獲得する機会を失うので δ で割り引いても損

偶数ステージ：

- プレーヤー２は $\frac{\delta}{1+\delta}$ より高い提示をすると **Accept** されるが明らかに損
- プレーヤー２は $\frac{\delta}{1+\delta}$ より低い提示をすると **Reject** され明らかに損
- プレーヤー１は $\frac{\delta}{1+\delta}$ 以上の分け前を **Reject** すると次期に $\frac{1}{1+\delta}$ を獲得するが δ で割り引くので損
- プレーヤー１は $\frac{\delta}{1+\delta}$ 未満の分け前を **Accept** すると次期に $\frac{1}{1+\delta}$ を獲得する機会を失うので δ で割り引いても損

$(\frac{1}{1+\delta},\frac{\delta}{1+\delta})$ は部分ゲーム完全均衡によって達成できる「唯一の」利得ベクトル

- プレーヤー**1**から始まるゲームの部分ゲーム完全均衡において達成できるプレーヤー１の利得の上限を $\overline{v}_1$, 下限を $\underline{v}_1$ とする
- プレーヤー**2**から始まるゲームの部分ゲーム完全均衡において達成できるプレーヤー２の利得の上限を $\overline{v}_2$, 下限を $\underline{v}_2$ とする
- モデルは対称だから $(\overline{v}_2,\underline{v}_2)=(\overline{v}_1,\underline{v}_1)$ 成立。以下、$(\overline{v},\underline{v})$ と記す

- ステージ１にてプレーヤー１の提案はプレーヤー２に最低限 $\delta\underline{v}$ を与える
  つまり、$1-\delta\underline{v}$ 以上のプレーヤー１の利得は均衡にならず

∴ $\overline{v}\le 1-\delta\underline{v}$ つまり $(1-\delta)\overline{v}\le 1-\delta\overline{v}-\delta\underline{v}$

- プレーヤー１の提案は、プレーヤー２に $\delta\overline{v}$ を保証すれば必ず **Accept**
  つまり、$1-\delta\overline{v}$ 以下のプレーヤー１の利得は均衡にならず

∴ $\underline{v}\ge 1-\delta\overline{v}$ つまり $(1-\delta)\underline{v}\ge 1-\delta\overline{v}-\delta\underline{v}$

∴ $(1-\delta)\overline{v}\le 1-\delta\overline{v}-\delta\underline{v}\le(1-\delta)\underline{v}$. $\overline{v}\ge\underline{v}$ より $\overline{v}=\underline{v}=\dfrac{1}{1+\delta}$ 成立！ **Q.E.D.**