2022年1月18日

第15章：社会的選択理論

Social Choice Theory

経済セミナー（2016年4，5月号）連載（松島斉）
「オークションとマーケットデザイン」
第19回「経済学と倫理：正義か集計か」

社会的選択：　経済的決定（配分、市場）
政治的決定（代議士、選挙）
分権的決定、集権的決定

社会的選択の「ルール」を定める
社会的選択の「目標」を定める
社会的選択の合理性：　社会的選択の公理化問題

15.1. 社会的選択と社会的選好
Social Choice and Social Preference

「個人の選択」再考（意思決定, 第 10 章）

個人の選択肢全体集合	X
個人の選択肢集合	$B \subset X$
選択ルール	$C : 2^X \setminus \{\phi\} \to X$, $C(B) \in B$ 経済問題： 何を購入するか、何を生産するか 政治問題： 誰に投票するか
選好	$\succsim_i$, $u_i : X \to R$
選択ルールと選好の関係	$u_i(C(B)) \geq u_i(x)$ for all $x \in B$

社会的選択

社会状態全体集合　　　　$\boldsymbol{\Omega}$, 任意の社会状態 $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$

社会状態 $\boldsymbol{\omega}$ とは？：　　社会に関わる様々な情報

誰がどのような選好を持っているか

誰がどのような能力をもっているか

誰がどの程度貧困か,

………

社会的選択

(個人の選択のアナロジー)

社会の選択肢全体集合　$X,\ x \in X$

社会の選択肢集合　$B \subset X$

経済問題： どのように資源配分を決めるか

政治問題： 誰を代議士に選ぶか

社会的選択ルール　$C : 2^X \setminus \{\phi\} \times \Omega \to X$

$C(B, \omega) \in B$

社会的選択は社会状態に依存しうる

社会状態 $\omega \in \Omega$ においては　$C(B,\omega) \in B$ を社会的に選択する

別の社会状態 $\omega' \in \Omega$ においては　$C(B,\omega') \in B$ を社会的に選択する

$$C(B,\omega) \neq C(B,\omega')$$

例：センの笛
（Amartya Sen, Nobel Winner 1998）

1 本の笛を三人の子供（**A, B, C**）の誰に与えればいいか

A は一番貧しい
B は笛が一番上手（笛を楽しめる）
C は笛の作り主

平等主義：	**A**	貧困度を個人間比較
功利主義：	**B**	効用を個人間比較
自由主義：	**C**	既得権を尊重（個人間比較なし）

どの主張が優先されるか？：　社会状態（の詳細）に依存：
例えば **A** の貧困度はさほど酷くはない
B は凄くうまいわけではない
→ **C**！

社会的選好

$$\succsim \text{ あるいは } u: X \times \Omega \to R$$

$u(x,\omega) > u(y,\omega)$ 社会状態 $\omega \in \Omega$ においては
x の方が y よりも社会的に選好される

$u(y,\omega') > u(x,\omega')$ 別の社会状態 $\omega' \in \Omega$ においては
y の方が xよりも社会的に選好される

社会的選好の考え方

二つの視点（分析者の立場）
社会厚生 vs 社会的集計

社会厚生：　社会状態 ω においては $u(x,\omega)$ の大小によって
各選択肢 $x \in X$ の社会厚生の良悪が評価される
例：総余剰、所得分配の公平性指標、……

＊　社会状態間の比較も（空想）：

$$u(x,\omega) > u(y,\omega')$$

社会状態 $\omega \in \Omega$ における x の方が
別の社会状態 $\omega' \in \Omega$ における y よりも
社会的に選好される

社会的集計：　社会状態の詳細ではなく
個人の選好に関する情報 $(\succsim_i)_{i \in N}$ だけを考慮する
個人の選好を集計して社会的選好を導く

なぜ個人の選好だけを考慮するのか？
個人間を比較する基準には客観性がない
個人の選好情報以外の情報を集めるのは困難
「センの笛のストーリーは絵空事」

社会的選択ルール C の様々なとらえ方

- 社会的選択の目標：

状態 ω においては
選択肢集合 $B \subset X$ の中で
$C(B,\omega)$ が社会的に望ましい

- 社会的選好 u から導かれる：

選択肢集合 $B \subset X$ の中で
社会的選好のトップランクが
社会的に選択されるべきである
$u(C(B,\omega),\omega) \geq u(x,\omega)$ for all $x \in B$

あるいは

- 投票ルール：

個人の投票行動から社会的選択を導く
特定のルール（制度、手続き）を記述
している

以下より社会的選択ルールを「投票ルール」として考察しよう！

代表的な投票ルール

多数決ルール（Majority）

選択肢二つ：**X**、**Y**
投票者は **X** か **Y** に投票する
得票数の多い選択肢が選ばれる

選択肢が二つの場合は
多数決ルールは（それなりに）説得力をもつ

cf. 上田さんと石川さんは **X** を **Y** より少し好む。田口さんは **Y** を **X** より非常に！！好む。

選択肢が三つ以上の場合の
代表的な投票ルール

大多数（多数決）ルール
ボルダルール
コンドルセ勝者

いずれにもメリット、デメリットあり

15.2.　投票ルールのパフォーマンス

例１：　　候補者 **X**、**Y**、**Z**、**W**

４３人の投票者

５人	１０人	１４人	１４人
X	X	Y	Z
Y	Z	W	Y
Z	Y	Z	W
W	W	X	X

候補者 **X**、**Y**、**Z**、**W** のうちだれを選べばいいか？

多数決ルール（大多数、Plurality）

各投票者に一番好きな候補者を表明させる
一番得票の多い候補者を選ぶ（過半数を超えなくてもよい）

５人	１０人	１４人	１４人
X	X	Y	Z
Y	Z	W	Y
Z	Y	Z	W
W	W	X	X

X　　１５人
Y　　１４人
Z　　１４人
W　　０人

X が選ばれる！

コンドルセ勝者

各投票者に選好そのものを表明させる
１対１で「多数決ルール」にもとづいて総当たり戦

５人	１０人	１４人	１４人
X	X	Y	Z
Y	Z	W	Y
Z	Y	Z	W
W	W	X	X

X vs Z :　１５：２８で　**Z**
Y vs Z :　１９：２４で　**Z**
Z vs W :　２９：１４で　**Z**
Z はコンドルセ勝者（一対一の多数決で常に勝つ）

Z が選ばれる！

ボルダルール（準満場一致ルール）

各投票者に選好そのものを表明させる
候補者ごとに「満場一致からどの程度かけ離れているか（ボルダ得点）」を計算する

５人	１０人	１４人	１４人
X	X	Y	Z
Y	Z	W	Y
Z	Y	Z	W
W	W	X	X

X　（１－１）×５＋（１－１）×１０＋（４－１）×１４＋（４－１）×１４＝８４
Y　（２－１）×５＋（３－１）×１０＋（１－１）×１４＋（２－１）×１４＝３９
Z　４８
W　８７

Y が一番満場一致に近い（$Y \succ Z \succ X \succ W$）

Y が選ばれる！

投票ルールごとに選ばれる候補者が異なる

（**X**、**Y**、**Z** それぞれに捨てがたい魅力がある）

投票がフェアであるためには
常に同じ投票ルールが使われるべき

悪い例：　特定の選挙人が投票ルールを裁量的に決める：
X を一押ししたい時は　大多数ルール
Y を一押ししたい時は　ボルダルール
Z を一押ししたい時は　総当たり戦（コンドルセ勝者）

15.3. 投票ルールの問題点

各投票ルールはそれぞれ欠点をもっている

欠点の少ない投票ルールが望まれる

しかしその判断は容易でない……

15.3.1. ボルダルールの問題点

無関係な選択肢からの非独立性

例１再考：

５人	１０人	１４人	１４人
X	X	Y	Z
Y	Z	W	Y
Z	Y	Z	W
W	W	X	X

W は **Y** よりも全員に嫌われている

W を除いてボルダ得点を再度計算してみよう

X　　２×１４＋２×１４＝５６

Y　　１×５＋２×１０＋１×１４＝３９

Z　　１０＋１０＋１４＝３４

Y ではなく **Z**（コンドルセ勝者と同じ人）が選ばれる（$Z \succ Y \succ X$）

W を入れることで **Z** の見栄えを悪くしていた

15.3.2. コンドルセ・パラドックス

非推移性

（コンドルセ勝者が存在しないケースがある）

例 2：

A さん	**B** さん	**C** さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

X は **Y** に勝つ；**Y** は **Z** に勝つ；**X** は **Z** に負ける

総当たり戦では決着がつかない

トーナメント形式にすることで決着

例えば「**X** と **Y** の勝者が **Z** と対戦」で決着

トーナメントの組み方によって結果が変わってしまう……

15.3.3. インセンティブ問題

A さん	**B** さん	**C** さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

コンドルセ勝者いない，ボルダ得点おなじ，大多数いない

誰かの意見に従おう（たとえば **A** さん　⇒　**X** を選択）

このような状況では
誰か別の人（**B** さん）が
嘘の投票をするインセンティブをもつ恐れがある

A さん	**B** さん	**C** さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

↓

A さん	**B** さん	**C** さん
X	**Z**	Z
Y	**Y**	X
Z	X	Y

B が嘘をつくことによって
Z がコンドルセ勝者、大多数、ボルダ最小得点（**2** 点）になる
B にとって得

15.3.4. 単峰性（Single-Peakedness）とその限界

A さん	**B** さん	**C** さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

コンドルセ勝者いない、ボルダ得点おなじ、大多数いない

「選挙の焦点は国防」を強調

X 国防強化；**Y** 現状維持；**Z** 縮小

この場合 **C** さんの選好は不自然になる： 単峰性 **ZYX** に変更へ

A さん	**B** さん	**C** さん
X	Y	Z
Y	Z	**Y**
Z	X	**X**

コンドルセ勝者 **Y** ボルダ最小得点 **Y**！

現実の多くの社会的選択問題の論点において
単峰性は成立している
（あなたは右派？左派？中庸？）

しかし
複数の論点から誰に投票するかを判断する必要がある場合には
単峰性は当てはまらない：

別の論点（コロナ対策、環境問題、少子化問題など）が棚上げに

15.4. アローの不可能性定理

Kenneth Arrow（Nobel winner 1972）による
「理想的な民主主義」

あらかじめ社会的集計としての社会的選好

$$\succsim \equiv \succsim \left((\succsim_i)_{i \in N} \right)$$

が適切に設定（憲法制定のアナロジー）

社会的選好から社会的選択が随時導かれる

適切に設定された社会的選好 $\succsim \equiv \succsim((\succsim_i)_{i\in N})$ は
以下の三つの条件（公理）をみたすものでなければならない

公理１（パレート性）
公理２（無関係な選択肢からの独立性：**IIA**）
公理３（非独裁制）

アローの不可能性定理
選択肢全体集合が $|X| \geq \mathbf{3}$ の時
公理１、２、３をみたす社会的選好は存在しない
（アロー的「民主主義の理想」は存在しない）

公理１（パレート性）：

任意の $(\succsim_i)_{i \in N}$ について、

$$[x \succsim_i y \text{ for all } i \in N] \Rightarrow [x \succsim y]$$

全員がｙよりｘを選好するならば、社会的にもｙよりｘが選好される

公理２（無関係な選択肢からの独立性：IIA）：

任意の $(\succsim_i)_{i\in N}$、$(\trianglerighteq_i)_{i\in N}$ について、

$$[[x \succsim_i y] \Leftrightarrow [x \trianglerighteq_i y] \text{ for all } i \in N]$$
$$\Rightarrow \quad [[x \succsim y] \Leftrightarrow [x \trianglerighteq y]]$$

任意の二種類の個人選好プロファイル $(\succsim_i)_{i\in N}$、$(\trianglerighteq_i)_{i\in N}$ を考える

選択肢 x と y については、どちらのプロファイルにおいても、各個人 $i \in N$ の選好は同じであるとする

$[x \succsim_i y] \Leftrightarrow [x \trianglerighteq_i y]$

ならば選択肢 x と y についての社会的選好も同じになる（他の選択肢に影響されない）

$[x \succsim y] \Leftrightarrow [x \trianglerighteq y]$

公理３（非独裁制）：

以下をみたす $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N}$ は存在しない：
任意の $(\succsim_i)_{i \in N}$ について、

$$[x \succsim_i y] \Rightarrow [x \succsim y]$$

独裁者 $\boldsymbol{i}$ の選好がそのまま社会的選好になるようなケースを排除する

公理１（パレート性）と公理 **3**（非独裁制）は文句のつけようのない要求だ

しかし
公理２（**IIA, Independence of Irrelevant Alternative**）については
やや議論の余地がある

公理 **2** は個人の好き嫌いの程度や個人間比較を排除する
⇒　ボルダルールを排除

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}$ としてボルダ得点を計算すると公理２をみたさない
ボルダ得点では、個人の好き嫌いの程度や個人間比較
(満場一致からどれほど離れているか、だれがより離れているか)
が加味される

アローは
「理想的な民主主義にとって好き嫌いの程度や個人間比較は
本質的でない」と考えたようだ

アローの不可能性定理：

選択肢全体集合が $|X| \geq 3$ の時

公理１、２、３をみたす社会的選好は存在しない

三つの公理は、ある程度は「納得！」と感じられる要求ばかりである
しかしそれらすべてが一度にみたされるわけではない

三つの要求はトレードオフの関係に

証明：松島（経セミ）を参照のこと。

ここでは証明の一部分を紹介しよう

単純化のため以下の公理を追加（実際の証明には不要）

公理４（中立性）：選択肢のラベリングからの独立性

任意の $(\succsim_i)_{i\in N}$、$(\trianglerighteq_i)_{i\in N}$、任意の one-to-one mapping $\mu : X \to X$ について、

$$[[x \succsim_i y] \Leftrightarrow [\mu(x) \trianglerighteq_i \mu(y)] \text{ for all } x \in X,\ y \in X, \text{ and } i \in N]$$
$$\Rightarrow [[x \succsim y] \Leftrightarrow [\mu(x) \trianglerighteq \mu(y)]]$$

各個人の選好（$x \succsim_i y$ or $y \succsim_i x$）が
別の各個人の選好を選択肢変換したもの（$\mu(x) \trianglerighteq_i \mu(y)$ or $\mu(x) \trianglerighteq_i \mu(y)$）と
同じであるならば
もとの社会的選好（$x \succsim y$ or $y \succsim x$）と
あとの社会的選好をμ－選択肢変換したもの（$\mu(x) \trianglerighteq \mu(y)$ or $\mu(x) \trianglerighteq \mu(y)$）
は同じになる
（リラベリングからの普遍性）

公理４（中立性）：例による解説

A さん	**B** さん	**C** さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

A さんの意見に従おう！　⇒　**X** を選択

公理４（中立性）下では、同じような仕方で意見が割れるといつも **A** さんの意見で決めることになる

C さん	**A** さん	**B** さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

やはり **A** さんの意見に従おう！　⇒　**Y** を選択

B さん	**C** さん	**A** さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

やはり **A** さんの意見に従おう！　⇒　**Z** を選択

さらに公理１（パレート），公理２（**IIA**）が加わると**……**

「いっそのこと、どんなケースでも **A** さんに決めてもらいましょう」
というルールが成立してしまう

「**A** さんだけが **x** を一押し、他の人はみな **x** を最低ランク」
⇒　**X** が選ばれてしまう
A さんは独裁者だ！

アローの不可能性定理：証明のエッセンス

ピヴォタル投票者 i^* の存在（公理２（IIA）を使って）

1	2	3	....	n
x	x	x	....	x
y	y	y	....	y

→ $x \succsim y$（公理１（パレート）より）

1	2	3	....	n
y	x	x	....	x
x	y	y	....	y

→ $x \succsim y$

左から一人ずつｘとｙの個人の順位をひっくり返していくと
ある $i = i^*$（ピヴォタル投票者）が存在して $x \succsim y$ から $y \succsim x$ に
社会的順位がひっくり返る

1	2	3	.....i*-1	i*	..............n
y	y	y	.....y	x	x
x	x	x	x	y	.............y

→ $x \succsim y$

（ここで逆転）

1	2	3	....	i*	i*+1	......n
y	y	y	....	y	x	x
x	x	x	....	x	y	.........y

→ $y \succsim x$

公理４（中立性）より

1	2	3	....	i*-1	i*	i*+1	n
y	y	y	....	y	x	z..................	z
z	z	z	....	z	y	x..................	x
x	x	x	....	x	z	y..................	y

→ $x \succsim y,\ y \succsim z$

社会的選好の推移性より　→ $x \succsim z$

∴　ピヴォタル i^* だけが x を z よりも選好している
にもかかわらず
x が z よりも社会的に選好されてしまう......

第 **15** 章終わり

宿題（**15**）を提出すること