2022 年 10 月 7 日

第 2 章：ベイジアンゲーム（Bayesian Game）

均衡概念：均衡が一般的に存在することが望まれる。しかし…

優位戦略：　存在するとは限らない
事後均衡：　ナッシュ均衡の特殊ケース
ナッシュ均衡自体は一般的に存在 **OK**。しかし
非対称情報制約（タイプ ω_i にのみ依存）のため
事後均衡は存在するとは限らない

完備情報下で一般的に存在する均衡概念：　　　　ナッシュ均衡

不完備情報下で一般的に存在する均衡概念：　　　**ベイジアン・ナッシュ均衡**

Bayesian Nash Equilibrium (BNE) の定義のためには：

不完備情報の静学ゲームに
Belief System
（不確実性に対するプレーヤーの予想の仕方）を追加して
「ベイジアンゲーム（**Bayesian Game**）」
を定義する必要がある

2. 1. Belief System

不確実性（不完備情報）： どの **State** $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ が現実におきているのか？

自身のタイプω_i はわかっている。しかし
他のプレーヤーのタイプ$\omega_{-i} = (\omega_j)_{j \neq i} \in \Omega_{-i}$ はわからない

そこで各プレーヤー $i \in N$ は、
他のプレーヤーのタイプ・プロファイル ω_{-i} はどれかについて
「確率的に」査定する：

Belief $p_i = (p_i(\cdot \mid \omega_i))_{\omega_i \in \Omega_i}$

Player $i's$ Belief on the other players' types $p_i = (p_i(\cdot \mid \omega_i))_{\omega_i \in \Omega_i}$

$$p_i(\cdot \mid \omega_i) : \Omega_{-i} \to [0, \infty),$$

$$\text{where} \quad \sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i) = 1$$

タイプ ω_i のプレーヤー i は
他のプレーヤーのタイプ・プロファイルが ω_{-i} である確率が

$$p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i)$$

であると予想する

Belief System $p=(p_i)_{i\in N}$ の様々な分類

Common Prior beliefs（共通事前分布）：

Common prior（事前確率）$p:\Omega\rightarrow[0,\infty)$：

何も情報持たなければ全プレーヤーは **State** ω について同じ確率予想をする

しかし私的情報（タイプ）をもつと異なる事後確率（**Posterior**）になる：

$$p_i(\omega_{-i}\mid\omega_i)=\frac{p(\omega_i,\omega_{-i})}{\sum_{\omega'_{-i}\in\Omega_{-i}}p(\omega_i,\omega'_{-i})}$$

Heterogeneous Beliefs：

No common prior exists

何も情報を持たなくても ω についてお互いに異なる確率予想をする

Independent Types（分布独立性）：

Belief $p_i(\cdot \mid \omega_i)$ はタイプ ω_i から独立

$$p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i) = p_i(\omega_{-i})$$

Correlated Types（分布相関性）：

Belief $p_i(\cdot \mid \omega_i)$ はタイプ ω_i に依存

＊その他：　対称分布、非対称分布など（後述）

＊ よく扱われる（扱いやすい）ケース：

Common Prior + **Independent Types**

$$p(\omega) = \prod_{i \in N} p^i(\omega_i), \text{ where}$$

$$p^i(\omega_i) \equiv \sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} p(\omega_i, \omega_{-i}) \qquad \text{タイプ } \omega_i \text{ の分布}$$

(superscript に注意)

＊ Belief System の記述例：

離散空間のタイプ集合：　$\Omega_i = \{0,1,2,\ldots\}$

確率分布　$P^i(\omega_i) = \sum_{b=0}^{\omega_i} p^i(b)$

（大文字に注意）

連続空間のタイプ集合：　$\Omega_i = [0,\infty)$

確率密度　$p^i(\omega_i) \in [0,\infty)$

確率分布　$P^i(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} p^i(b)db$

（大文字に注意）

2. 2. ベイジアンゲーム：定義

不完備情報の静学ゲーム Γ に
信念（**belief**）システム $\boldsymbol{p}$ を追加

Bayesian Game: Definition

Incomplete Information Game ＋ Belief System $p = (p_i)_{i \in N}$

$$(\Gamma, p) \equiv ((N, M, (\Omega_i)_{i \in N}, \Omega, (u_i(\cdot, \omega))_{\omega \in \Omega})_{i \in N}), p)$$

期待効用（私的情報の条件付き）

Player $i's$ expected payoff
when type is ω_i and strategy profile $s \in S$ is played
in Bayesian game (Γ, p):

$$E[u_i(s(\omega),\omega) \mid \omega_i] \equiv \sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} u_i(s(\omega),\omega)\, p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i)$$

最適反応

各プレーヤーは自身の私的情報をもとに期待利得を最大化

Player $i's$ strategy $s_i \in S_i$ is said to be
a Best Response to $s_{-i} \in S_{-i}$ in Bayesian game (Γ, p) if

for every $\omega_i \in \Omega_i$ and $m_i \in M_i$

$$E[u_i(s(\omega),\omega) \mid \omega_i] \geq E[u_i((m_i, s_{-i}(\omega_{-i})),\omega) \mid \omega_i]$$

where $s(\omega) = (s_i(\omega_i))_{i \in N} \in M$.

$E[u_i(s(\omega),\omega) \mid \omega_i]$は
プレーヤーがタイプω_iである場合の
戦略プロファイル s がもたらす期待利得

2. 3. Bayesian Nash Equilibrium (BNE)

A strategy profile $s^* \in S$ is said to be
Bayesian Nash Equilibrium in Bayesian game (Γ, p) if

each player $i's$ strategy $s_i^* \in S_i$ is a best response to $s_{-i}^* \in S_{-i}$, i.e.,

for every $i \in N$, $\omega_i \in \Omega_i$, and $m_i \in M_i$,

$$E[u_i(s^*(\omega),\omega) \mid \omega_i] \geq E[u_i((m_i, s_{-i}^*(\omega_{-i})),\omega) \mid \omega_i]$$

どの戦略プロファイルが **BNE** になるかは
不完備情報ゲーム Γ のみならず **Belief System** p にも依存

Belief system をどう特定化するかに関係なくＢＮＥならば
それは事後均衡になる：

[Strategy profile s is an ex post equilibrium]

$\Updownarrow$

[Strategy profile s is a Bayesian Nash equilibrium
irrespective of belief system p]

＊Bayesian Nash Equilibrium と Nash Equilibrium の関係

ベイジアンゲームを
完備情報の静学ゲーム（標準形ゲーム）に見立ててみよう：
各プレーヤーの各タイプ ω_i を「独立のプレーヤー（**Agent**）」と捉えると ……

Agent-Normal Form Game

$$(H, A, w)$$

プレーヤー集合 $H \equiv \bigcup_{i \in N} \Omega_i,\ \omega_i \in H$

行動集合 $A \equiv \times_{h \in H} A_h,\ A_{\omega_i} = M_i,\ a = (a_h)_{h \in H} \in A$

利得関数プロファイル $w = (w_h)_{h \in H}$

$$w_{\omega_i}(a) = E[u_i(s(\omega), \omega) \mid \omega_i],$$

where we write

$$s_i(\omega_i) = a_{\omega_i} \quad \text{for all } i \in N \text{ and } \omega_i \in \Omega_i.$$

ベイジアンゲームにおけるＢＮＥは
Agent-Normal Form Game におけるＮＥと同値である：

[s is a Bayesian Nash equilibrium in Bayesian game (Γ, p)]

$$\Updownarrow$$

[a is a Nash equilibrium in associated agent-normal form game (H, A, w),
where $s_i(\omega_i) = a_{\omega_i}$ for all $i \in N$ and $\omega_i \in \Omega_i$]

ＢＮＥは一般的に存在するといえる

∵ **Agent-normal form game** におけるナッシュ均衡が一般的に存在するため

「ベイジアンゲームおよびＢＮＥ」は
不完備情報の問題に対して
完備情報の問題と同じ分析方法を使えるようにする
すぐれた工夫である

（続く）