

第4章 VCG メカニズム (続き)

4.1. VCG Mechanism: Definition

Definition: Direct mechanism (g, x) is said to be a **VCG mechanism** if the allocation rule g is **efficient**, i.e., for every $\omega \in \Omega$,

$$\sum_{i \in N} v_i(g(\omega), \omega_i) \geq \sum_{i \in N} v_i(a, \omega_i) \text{ for all } a \in A,$$

and, for every $i \in N$, there exists a function $h_i : \Omega_{-i} \rightarrow R$ such that

$$x_i(\omega) = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(\omega), \omega_j) + h_i(\omega_{-i})$$

↑ この一見わかりにくい支払いルールの意味を理解することが本章の目的

VCG Mechanism の支払いルール x はどんな意味??

Message profile $m \in M \equiv \Omega$ がアナウンスされると

CPは各プレイヤー i に対して

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$$
 円支払う。

さらにCPは各プレイヤー i から

$$h_i(m_{-i})$$
 円徴収する。

よって、プレイヤー i の私的便益は

$$\begin{aligned} & v_i(g(m), \omega_i) - x_i(m) \\ = & v_i(g(m), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) - h_i(m_{-i}) \end{aligned}$$

VCG メカニズムを理解するため、まず特殊ケースとして
「徴収なし」のケースを考えてみよう： $h_i(m_{-i}) \equiv 0$

$$\therefore x_i(m) = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

各プレイヤー i は「私のタイプは $m_i \in \Omega_i$ 」とアナウンスする
CP はそれを鵜呑みにするとしよう

「真の状態は $m = (m_i)_{i \in N} \in \prod_{i \in N} \Omega_i$ と信じよう。

ならば、配分を $g(m)$ としよう。」

CP は社会的便益（総余剰）を $\sum_{j \in N} v_j(g(m), m_j)$ と想定し

各プレイヤー i の私的便益を $v_i(g(m), m_i)$ と想定したことになる

「社会的便益と私的便益は乖離している」

⇒ 「このままではうそをつかれる懸念あり」

そこで、CPは
「内部化 (Internalization)」を企てる

社会的便益と私的便益は一致してないので
内部化によって一致させよう

VCGの支払いルールの本質は
この「内部化」の仕方にある

* 内部化 (既出) : 市場の失敗の代表的な解決方法
矯正税 (ピグー税)

VCG の支払いルールの本質は「内部化」にある

CP は各プレイヤー i に
 「他のプレイヤーの私的便益の総和」

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

を支払ってやる

すると CP が予想する各プレイヤー i の利得は

$$v_i(g(m), m_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

$$= \sum_{j \in N} v_j(g(m), m_j)$$

$$= \max_{a \in A} \sum_{j \in N} v_j(a, m_j)$$

これは「社会状態 $m \in \Omega$ の時の最大化総余剰」に一致

一方、真の社会状態を $\omega \in \Omega$ とすると、
 各プレイヤー i の「実際の」便益は $v_i(g(m), m_i)$ でなく
 $v_i(g(m), \omega_i)$ である。

各プレイヤー i の「実際の」利得は

$$v_i(g(m), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$$

これは「社会状態 $(\omega_i, m_{-i}) \in \Omega$ にて配分 $g(m)$ が選ばれた場合の
 総余剰」に一致している

配分が $g(m) \in A$ でなく $g(\omega_i, m_{-i}) \in A$ ならば
 (つまり m_i の代わりに ω_i をアナウンスするならば)
 プレーヤー i の利得は

$$\begin{aligned}
 & v_i(g(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(\omega_i, m_{-i}), m_j) \\
 &= \max_{a \in A} \{v_i(a, \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, m_j)\} \\
 &\geq v_i(g(m), \omega_i) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)
 \end{aligned}$$

これは「社会状態 (ω_i, m_{-i}) の時の最大化総余剰」に一致するので
 相手のメッセージ m_{-i} に関係なく正直にタイプ表明するのが
 ベストであることがわから
 \therefore 正直が優位戦略になっている

VCG メカニズム (g, x) : 一般形

$$x_i(m) = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) + h_i(m_{-i})$$

$h_i(m_{-i})$ はどんな値でもOK

ただし

自身のメッセージ m_i から独立でないため

(独立でない場合

うそをついて徴収額を低くする可能性があるので
正直がベストにならない)

$h_i(m_{-i})$ の追加は CP にとってとても大事：これがないと **大赤字**

各プレイヤー i に $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$ 支払っているので、トータルで

$$\sum_{i \in N} \left\{ \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) \right\} = (n-1) \sum_{j \in N} v_j(g(m), m_j)$$

つまり

総余剰 $\sum_{j \in N} v_j(g(m), m_j)$ の $n-1$ 倍も CP は支払っていることになる

\therefore 各プレイヤーから $h_i(m_{-i})$ 円徴収しよう！

定理 4-1 : 任意の VCG メカニズムにおいて、正直戦略は各プレイヤーにとって優位戦略である。つまり、VCG メカニズムは **incentive compatibility in dominant strategy (DIC)** をみたす。

証明 : 任意の $m \in M$ について

$$\begin{aligned}
 v_i(g(m), \omega_i) - x_i(m) &= v_i(g(m), \omega_i) + \sum_{j \neq i} v_j(g(m), m_j) - h_i(m_{-i}) \\
 &\leq \max_{a \in A} \{v_i(a, \omega_i) + \sum_{j \neq i} v_j(a, m_j)\} - h_i(m_{-i}) \\
 &= v_i(g(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) + \sum_{j \neq i} v_j(g(\omega_i, m_{-i}), m_j) - h_i(m_{-i}).
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

4.2. ピヴォット・メカニズム (Pivot Mechanism)

徴収額 $h_i(m_{-i})$ を大きくすればするほど CP は儲かる。
しかし大きくしすぎるとプレイヤーが参加しなくなる恐れがある。

∴ プレーヤーの「参加制約 (Individual Rationality)」を考慮すべし！

以下、配分問題に参加しない場合の機会費用を「ゼロ」としよう
(ゼロじゃないケースの考察も重要：後述)

参加制約条件 (Participation Constraint, Individual Rationality) :

A direct mechanism (g, x) satisfies **participation constraint** if for every $i \in N$,

$$v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega) \geq 0 \text{ for all } \omega \in \Omega.$$

参加制約をみたす VCG メカニズム :

$$v_i(g(\omega), \omega_j) - x_i(\omega) = \sum_{j \in N} v_j(g(\omega), \omega_j) - h_i(\omega_{-i}) \geq 0 \text{ for all } \omega \in \Omega$$

Pivot Mechanism とは？

参加制約をみたす VCG メカニズムの中で
もっとも CP の収入をたかめるメカニズムのこと :

For every $i \in N$ and $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$,

$$h_i(\omega_{-i}) \equiv \min_{\omega_i \in \Omega_i} \sum_{j \in N} v_j(g(\omega), \omega_j)$$

Pivot Mechanism においては、

for every $i \in N$ and $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$,

$$v_i(g(\omega), \omega_j) - x_i(\omega) = \sum_{j \in N} v_j(g(\omega), \omega_j) - h_i(\omega_{-i}) \geq 0 \text{ for all } \omega_i \in \Omega_i,$$

where the equality holds for some $\omega_i \in \Omega_i$.

さらに追加仮定として…

$$v_i(a, \omega_i) \geq 0 \text{ for all } i \in N, a \in A, \text{ and } \omega_i \in \Omega_i$$

および

There exists $\bar{\omega}_i \in \Omega_i$ such that

$$v_i(a, \bar{\omega}_i) = 0 \text{ for all } a \in A$$

配分に関心ないタイプ $\bar{\omega}_i$ が存在するとする：

(オークションでは、財評価ゼロのタイプ： $\bar{\omega}_i = 0$)

この追加仮定下では

ピヴォット・メカニズムにおける徴収額は

$$h_i(\omega_{-i}) = \max_{a \in A} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, \omega_j)$$

「プレイヤー i 抜きの時の最大化総余剰」に一致 (Think why)

よって追加仮定下では
ピヴォット・VCGメカニズムにおける支払いルールは

$$x_i(m) = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) + \max_{a \in A} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, m_j)$$

となる。つまり

- 「自分がいなかった時の他のプレイヤーの最大便益： $\max_{a \in A} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, m_j)$ 」
 — 「自分がいる場合の他のプレイヤーの便益： $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j)$ 」
 = 「自分がいることによって被る他のプレイヤーの損失分」

を CP に支払うことになる

Marginal Contribution (限界的貢献度)

ピヴォット・メカニズムにおいて、各プレイヤーの利得は

$$\begin{aligned} v_i(g(\omega), \omega_i) - x_i(\omega) &= \sum_{j \in N} v_j(g(\omega), \omega_j) - \max_{a \in A} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, \omega_j) \\ &= \max_{a \in A} \sum_{j \in N} v_j(a, \omega_j) - \max_{a \in A} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, \omega_j) \end{aligned}$$

となる。

これはつまり

Marginal Contribution

(限界的貢献度「自分がいることによって総余剰がどのくらい高まるか」)
が利得になっている

4.3. 二位価格入札は **Pivot Mechanism** である

Pivot Mechanism:

$$\begin{aligned}
 x_i(m) &= - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m), m_j) + \max_{a \in A} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(a, m_j) \\
 &= -0 + \max_{j \neq i} m_j = \max_{j \neq i} m_j && \text{if } g(m) = i \text{ (落札)} \\
 &= -\max_{j \neq i} m_j + \max_{j \neq i} m_j = 0 && \text{if } g(m) \neq i \text{ (非落札)}
 \end{aligned}$$

∴ 二位価格入札はピヴォット・メカニズムである！

* 二位価格入札のコペルニクスの発想転換

価格の決め方（いくら？高い安い？）

⇒ 配分の効率性：二位価格を支払う（自分がいることで失う他者の便益）

⇒ ピヴォット・メカニズムへ一般化！

VCGメカニズムは唯一無二のすごいデザイン！

1) **State Space** をとても広く取って、「どのような利得関数も実現しうる」ことを仮定すると、**VCG** メカニズム以外に効率的な **incentive compatible mechanism in dominant strategy** は存在しない。

Theorem 7-2 (Green-Laffont-Holmstrom Theorem) : Suppose that for any $\eta: A \rightarrow R$ and any $i \in N$, there exists $\omega_i \in \Omega_i$ such that $v_i(\cdot, \omega_i) = \eta$. Then, VCG mechanisms are only direct mechanisms satisfying DIC.

2) 優位戦略を **BNE** に置き換えても、**Pivot mechanism** よりも高い収入を **CP** にもたらすような **incentive compatible mechanism in BNE (with participation constraint)** は存在しない。

(これは、後述する「収入同値定理 (**Revenue Equivalence Theorem**)」から導かれる)

3) **Private Values** 以外には、利得関数に制約条件必要なし。

4.4. 公共財の効率的配分と VCG メカニズム

* 橋（公共財）を建設する（ $a=1$ ）しない（ $a=0$ ）？

各経済主体 $i \in \{1, \dots, n\}$ の私的便益 $\omega_i \in R$ （負も考慮）

社会的便益は $\sum_{i=1}^n \omega_i$

効率的配分決定：

$$\sum_{i=1}^n \omega_i > 0 \rightarrow \text{建設するべき} \quad (a=1)$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \leq 0 \rightarrow \text{建設するべきでない} \quad (a=0)$$

私的便益が指摘情報である場合、いかにして効率的配分を達成できるか？

- 1) 投票による決定： (建設に) 賛成? 反対?
過半数が賛成すれば (そのときのみ) 建設
効率的配分にならない

例： $n = 5$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -1, \quad \omega_4 = \omega_5 = 10$$

2) 私的便益 ($m_i \in R$) を表明させる :

$$\sum_{i=1}^n m_i > 0 \rightarrow a = 1$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \leq 0 \rightarrow a = 0$$

正直表明 ($m_i = \omega_i \in R$) なら効率的配分達成

しかし正直表明するインセンティブもたない :

$$\left[\sum_{j=1}^n \omega_j < 0, \omega_i > 0 \right] \Rightarrow [\text{agent } i \text{ announces (large) } m_i > -\sum_{j \neq i} \omega_j$$

instead of ω_i ($< m_i$)]

3) メカニズムデザイン

2) で示された効率的配分に加え以下の支払いルールを設定する：

$$[\sum_{j=1}^n m_j > 0, \sum_{j \neq i} m_j < 0] \Rightarrow [x_i(m) = -\sum_{j \neq i} m_j \text{ を CP に支払う}]$$

$$[\sum_{j=1}^n m_j < 0, \sum_{j \neq i} m_j > 0] \Rightarrow [x_i(m) = \sum_{j \neq i} m_j \text{ を CP に支払う}]$$

$$\text{otherwise, } x_i(m) = 0$$

経済主体 i は、ピヴォタルである（決定を左右する）場合、その時のみ、**CP** に他の経済主体の損失分を支払う

VCG メカニズムになっている（**DIC** である）ことを確認せよ！

* (オークションではなく) 公共財供給や外部性のある私的財配分に
VCG メカニズムを応用する際の留意点

- 参加制約条件が意味なさないことがある： 排除不可能性
非常に低い機会費用 (生活基盤喪失)
- CP は収入よりも住民の支払い負担を軽くすることに關心
- (4. 2. のピヴォット・メカニズムの代わりに) 上記した VCG メカニズムがベンチマークにされる
- **i さんの Marginal Contribution** : i さんの福利を考慮した場合としない場合の経済厚生
の差が i さんの利得：
1 さん抜きでも入れても橋建設。1 さんは橋から恩恵を受ける
→ 1 さんは支払い請求なく恩恵を丸ごと得られる (社会にいてくれるだけでいい)

4.5. VCG メカニズムの問題点

- 1) **Private Values** の仮定が必要
Interdependent Values の場合には嘘をつくインセンティブが考えられる：

$$v_i(g(\omega), \omega) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(\omega), \omega)$$

$$< v_i(g(m_i, \omega_{-i}), \omega) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(m_i, \omega_{-i}), m_i, \omega_{-i})$$

となる $m_i \neq \omega_i$ が存在しうる

(「他の人の利得は高くないよ」などとうそをつく)

- 2) 談合（カルテル）が成立しやすい（後述）
- 3) 収支均衡しない：
CP 除く全員の支払い額を足してもゼロにならない
- 4) 機会費用 = 0 でない場合、CP の赤字が解消されない（後述）

5) **Cognitive Complexity:**

正直が優位戦略にもかかわらず、メカニズム自体がわかりにくい
二位価格入札ですら現実にあまりつかわれてこなかった
ただし、せり上げ入札やプロキシ入札：は現実によく使われている
二位価格入札と論理的にはほぼ同じか類似（後述）

6) **Computational Complexity**

複雑な配分問題になると効率的配分の計算がとても難しい

Algorithmic Game Theory: New Field of Game Theory
Incentive Auction

- 7) 複雑なオークションの問題を実際に解決したい時に、担当者も学者も「VCGは社会実装に不向きだ」と判断するケースが多い

オークションのノーベル賞

1996年

Vickrey

純粹理論

VCGメカニズム

2020年

Milgrom and Wilson

社会実装のための理論

SMRA (同時複数ラウンドせり上げオークション)

第2部にて紹介

8) 余剰最大化達成が必ずしも社会にとって望ましいとは限らない場合がある (たとえば貧困が関係する状況)

例: コロナマスク

A さん: マスク 1 枚に **1000** 円払う気がある
B さん: マスクに **100** 円以上は払いたくない
効率的な配分: A にあげるべきでは?

A さんは富裕層: 既にマスクを少し持っている
B さんは貧困層: マスクを持っていない
公平な配分: B にマスクを使ってもらうべきでは?
A にあげるのは倫理的に問題 (**unjust**) では?

例： 公共財（1）

10人の経済主体が橋の建設について決定

経済主体 1, 2 :	各々便益	10 (賛成)
経済主体 3 ~ 10 :	各々便益	-1 (反対)

効率的な配分： $10 \times 2 - 1 \times 8 = 12 > 0 \therefore$ 建設すべき

経済主体 3 ~ 10 は貧困層（経済主体 1, 2 は富裕層）：

公平な配分： \quad 建設するべきでない

経済学への批判： 「経済学は効率性と公正（厚生）を同一視しているのでは？」
 ジェイン・ジェイコブズ「アメリカ：大都市の死と生」1961
 映画「ニューヨーク都市計画革命」
<https://www.youtube.com/watch?v=1Yvp45aRBs8>

* 4. 4. で考察した VCG メカニズムを使うと...

経済主体 1 も 2 も支払ゼロで建設可決！

どちらか一方の便益だけで貧困層の便益を凌駕できる

経済主体 1 も 2 もピヴォタルではない∴支払いゼロ

非効率だが公平な配分のためのメカニズムデザインが必要ではないか

課題：「誰が貧困か」の情報収集と開示のインセンティブ

貧困を既得権益維持のための隠れ蓑に使われる？

例： 公共財（2）

2人の経済主体が橋の建設について決定

経済主体 1 :	外部の事業者（建設提案）	便益	1 0（賛成）
経済主体 2 :	地元民	便益	-1 1（反対）

効率的な配分： $1\ 0 - 1\ 1 = -1 < 0$ 建設しない

4. 4. の VCG によると..
 経済主体 2（地元民）は
 外部者の実行されない提案のために
CP に 1 0 払うはめになる：これはおかしくない???

例： 公共財（3）

2人の経済主体が橋の建設について決定

経済主体 1 :	外部事業者（建設提案）	便益	1 1（賛成）
経済主体 2 :	地元民	便益	-1 0（反対）

効率的な配分： $1\ 1 - 1\ 0 = 1 > 0$ 建設される！

4. 4. の VCG によると

経済主体 1（外部事業者）は CP に 1 0 払う

しかし経済主体 2（地元民）には何の補填もなされない（なされてはいけない！）

（∵ 補填する約束をするとインセンティブが崩れ
地元民は被害を大きさに言いだす）

第 4 章終わり
第 1 部終わり

宿題（４）を提出すること