2022 年 10 月 21, 25 日

第 6 章：オークション基礎（１）：
Private Values

6.1. 収入同値定理
（Revenue Equivalence Theorem）

参考文献：松島経セミ第 6 回

（期待）利得同値定理：　**Payoff Equivalence**
（期待）支払い同値定理：　**Payment Equivalence**
（期待）収入同値定理：　**Revenue Equivalence**

一位価格入札と二位価格入札の分析（一財一単位売買）：覚え書き

- 分布独立性

- 連続空間 $\Omega_i = [0,1]$ **(generally, multi-dimensional Euclidean Space** $\Omega_i = [0,1]^m$**)**

- 分布対称性および **Private Values** 下では、一位価格入札と二位価格入札で同じ社会的選択ルール（効率的配分）を達成する。この時、同じ期待利得、同じ期待支払額、同じ期待収入、を達成する（同値性）

第 6.1 節の目的：一般的な性質に拡張

同値定理

- 達成される社会的選択ルールが同じになるメカニズムであれば、どれも同じ期待収入、同じ期待支払額、同じ期待利得になる

- 効率的配分ルール（効率的社会的選択ルール）を達成する代表的なメカニズムは **VCG** メカニズム（あるいは **Pivot** メカニズム）である。もし **Pivot** メカニズムよりも期待収入を高めたいのであれば､売り手は、効率的配分をあきらめ、非効率な独占販売のためのメカニズムデザインを考える必要がある。

6. 1. 1. 同値定理ウォーミングアップ：離散空間から連続空間へ

（簡単な例による説明）

入札者２人、非分割財１単位

- 入札者２のタイプは　$\omega_2 = 1/2$　（不確実性なし）

  入札者１のタイプは　$\omega_1 = 0 \quad or \quad 1$　（私的情報）

＊　$g(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1, 1/2)$ を $g(\omega_1)$ と略記（同様に $x_i(\omega_1)$）

効率的で **Bayesian Incentive Compatible**（**BIC**）みたす **Direct Mechanism**（g, x）はどのようなものになるか？

参加制約：非落札時の支払いをゼロとしよう

効率的配分ルール：

$$g(1) = 1$$
$$g(0) = 2$$

（**Think why**）

支払いルール：

$$x_2(0) = 1/2$$
$$x_2(1) = 0$$
$$x_1(0) = 0$$

（**Think why**）

Question:

$$x_1(1) = ?$$

タイプ１の入札者１（必ず落札）はいくら支払うとすれば **BIC** 成立するか

入札者１が正直にタイプ表明する（BIC）には
$\mathbf{1 - x_1(1) \geq 0}$（$\boldsymbol{\omega_1 = 1}$ の正直インセンティブ）および
$\mathbf{0 - x_1(1) \leq 0}$（$\boldsymbol{\omega_1 = 0}$ の正直インセンティブ）：

$$\mathbf{0 \leq x_1(1) \leq 1}$$

BIC みたす支払い額には幅がある

$$\mathbf{x_1(1) = 1}$$

をえらべば売り手の期待収入最大化

この時、売り手は最大化総余剰額をすべて自分の収入にできる：
Full Surplus Extraction

- 次に、入札者１のタイプを増やして、$\omega_1 \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ としよう：

$x_1(2/3) = x_1(1)$、$x_1(1/3) = x_1(0) = 0$ であることが必要（**Think why**）

$$\min_{\omega_1 > 1/2} \omega_1 = 2/3 \geq x_1(1) \geq 1/3 = \max_{\omega_1 < 1/2} \omega_1$$

であれば **BIC** をみたす。

範囲が縮まっていることに注意！

（中間領域のタイプ $1/3$, $2/3$ のインセンティブが制約になる。**Think Why**）

$$x_1(1) = 2/3$$

をえらべば期待収入最大化される。

しかし、もはや売り手は総余剰をすべて徴収できない

入札者１に「情報レント（Information Rent）」発生

タイプ $2/3$ の入札者１が購入するためには

$x_1(2/3) \leq 2/3$ でないとだめ

一方、タイプ１の入札者１は「$x_1(1) = 1$」円まで払える

しかし $x_1(1) > 2/3$ ならば、タイプ $2/3$ だと嘘ついて安く買おうとする

∴　タイプ１に対しても $2/3$ しか徴収できない：

「情報レント」$1 - 2/3 = 1/3$ 円が発生

・　入札者１のタイプをさらに増やして

$$\omega_1 \in \{0, \frac{1}{L}, \frac{2}{L}, \ldots, \frac{L-1}{L}, 1\}$$

としよう（$L \geq 5$を奇数とする）

$$x_1(\omega_1) = x_1(1) \quad \text{for all } \omega_1 > \frac{1}{2}$$

$$x_1(\omega_1) = x_1(0) = 0 \quad \text{for all } \omega_1 < \frac{1}{2}$$

(Think why)

$$\therefore \quad \min_{\omega_1 > 1/2} \omega_1 = \frac{L+1}{2L} \geq x_1(1) \geq \frac{L-1}{2L} = \max_{\omega_1 < 1/2} \omega_1$$

L を無限に拡大していくと $x_1(1)$ は $1/2$ に収束

期待収入一意に確定！

情報レントは各タイプ $\omega_1 > 1/2$ について $\omega_1 - 1/2$:

Surplus 全て召し上げ！

- 離散タイプ集合 $\Omega_1 = \{0, \frac{1}{L}, \ldots, \frac{L-1}{L}, 1\}$ を連続タイプ集合 $\Omega_1 = [0,1]$ に近づけていけば期待収入は一意に確定

「連続空間のタイプ集合であれば
同じ社会的選択関数 $f : \Omega \to A$ を達成する
どんな BIC メカニズムも
実質的に同じ期待収入をもたらす！」
ことを示唆している
（同値定理へ）

6. 1. 2. 同値定理

以下、連続空間、分布独立性を仮定

当面は、**Private Values**（私的価値）の仮定いらない！

BIC をみたす Direct Mechanism $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x})$ がもたらす
期待利得、期待支払額、期待収入を
もとめてみよう

するとそれらの値は
$\boldsymbol{g}$ に依存するが $\boldsymbol{x}$ には依存しないことがわかる

∴「同値定理」

他のプレーヤーが正直な戦略に従う時、タイプ ω_i のプレーヤー i が ω_i' を表明した場合の期待利得：

$$y_i(\omega_i',\omega_i) \equiv E[v_i(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega) - x_i(\omega_i',\omega_{-i}) \mid \omega_i]$$

（ω_i について連続とする）

正直に表明（$\omega_i' = \omega_i$）した場合の期待利得：

$$y_i^*(\omega_i) \equiv y_i(\omega_i,\omega_i) = E[v_i(g(\omega),\omega) - x_i(\omega) \mid \omega_i]$$

Bayesian Incentive Compatibility (BIC) の定義を書き直すと

$$y_i^*(\omega_i) \geq y_i(\omega_i',\omega_i) \quad \text{for all } i,\ \omega_i, \text{ and } \omega_i'$$

つまり

$$y_i^*(\omega_i) = \max_{\omega_i' \in \Omega_i} y_i(\omega_i',\omega_i) \quad \text{for all } i,\ \omega_i$$

ここで重要な仮定をおく：

「絶対連続性（Absolute Continuity）」

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} \rho(b)db + y_i^*(0)$$

をみたす $\rho : [0,1] \to R$ が存在する

$\therefore \quad y_i^*(\omega_i)$ は連続でほぼいたるところで微分可能

「$y_i^*(\omega_i) \equiv y_i(\omega_i, \omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega) \mid \omega_i]$ が
絶対連続である」という仮定は
(g, x) が BIC であれば
実は非常に弱い仮定である：

＊　$y_i^*(\omega_i)$ の連続性は、$v_i(a, \omega)$ が a について連続でなくても成立する：
（有界な）$v_i(a, \omega)$ と $p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i)$ が ω_i について連続とする（弱い仮定）
ならば

$$\max_{\omega_i' \in \Omega_i} y_i(\omega_i', \omega_i) \equiv \max_{\omega_i' \in \Omega_i} E[v_i(g(\omega_i', \omega_{-i}), \omega) - x_i(\omega_i', \omega_{-i}) \mid \omega_i]$$

は ω_i について連続になっている（Think why）
BIC より

$$y_i^*(\omega_i) = \max_{\omega_i' \in \Omega_i} y_i(\omega_i', \omega_i)$$

は ω_i について連続になることがわかる

三つの重要定理

Theorem 6-1：期待利得同値（Payoff Equivalence)

Direct mechanism (g,x) が **BIC** および $y_i^*(0)=y_i^0$ をみたすならば、任意のタイプ $\omega_i\in[0,1]$ の期待利得は

$$y_i^*(\omega_i)=\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i'+y_i^0$$

ここで、$v_{i2}(a,\omega)\equiv\dfrac{\partial v_i(a,\omega)}{\partial\omega_i}$

$E_{\omega_{-i}}[\cdot]=E[\cdot\mid\omega_i]$は ω_{-i} についての分布独立性下での **Expectation Operator.**

（証明は超重要、後まわし）

この定理の重要ポイント：

期待利得は配分ルール g に依存しているが、支払いルール x に依存しない

つまり **BIC** であれば、x に無関係に期待利得が決まることになる

Theorem 6-2：期待支払同値（Payment Equivalence)

Direct mechanism (g,x) が **BIC** および $y_i^*(0)=y_i^0$ をみたすならば、任意のタイプ $\omega_i\in[0,1]$ の期待支払い額は

$$E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega)]$$
$$=E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega)]-\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i}E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i'-y_i^0$$

証明：$E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega_i,\omega_{-i})]=y_i^*(\omega_i)+E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega)]$ および定理 **6-1** より

$$E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega)]=E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega)]-\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i}E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i'-y_i^0$$

タイプ ω_i の期待支払額は x から独立！

Theorem 6-3：期待収入同値（Revenue Equivalence)

Direct mechanism (g,x) が **BIC** および $y_i^*(0)=y_i^0$ をみたすならば、期待収入は

$$E[\sum_{i\in N} x_i(\omega)]$$

$$=\sum_{i\in N} E_{\omega_i}[E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega),\omega_i)]-\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i'-y_i^0]$$

証明：定理 **6-2** から自明

期待収入は x から独立！

Theorem 6-1 を証明しよう

Theorem 6-1：期待利得同値（Payoff Equivalence)

Direct mechanism (g,x) が **BIC** および $y_i^*(0)=y_i^0$ をみたすならば、任意のタイプ $\omega_i\in[0,1]$ の期待利得は

$$y_i^*(\omega_i)=\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i' + y_i^0$$

カギとなる数学的性質は

「包絡線定理（**Envelope Theorem**）」

包絡線定理（Envelope Theorem）：

$$y_i^*(\omega_i) \equiv y_i(\omega_i, \omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega) \mid \omega_i]$$

が絶対連続である、つまり

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} \rho(b) db + y_i^*(0)$$

をみたす $\rho : [0,1] \to R$ が存在すると仮定する。ならば、任意の ω_i について、ほぼいたるところで

$$\rho(\omega_i) = y_{i2}(\omega_i, \omega_i)$$

が成立する。つまり

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{b=0}^{\omega_i} y_{i2}(b, b) db + y_i^*(0)$$

Proof of Envelope Theorem:

Note

$$\rho(\omega_i) = \frac{dy_i(\omega_i,\omega_i)}{d\omega_i} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{y_i(\omega_i,\omega_i) - y_i(\omega_i - \Delta,\omega_i - \Delta)}{\Delta}.$$

Because of BIC and definition of $y_i(\omega_i',\omega_i)$**, we have**

$$\rho(\omega_i) \le \lim_{\Delta\to 0}\frac{y_i(\omega_i,\omega_i) - y_i(\omega_i,\omega_i - \Delta)}{\Delta} \equiv y_{i2}(\omega_i,\omega_i),$$

and

$$\rho(\omega_i) \ge \lim_{\Delta\to 0}\frac{y_i(\omega_i,\omega_i + \Delta) - y_i(\omega_i,\omega_i)}{\Delta} \equiv y_{i2}(\omega_i,\omega_i).$$

（**Think why.**）よって、ほぼいたるところで

$$\rho(\omega_i) = v_{i2}(\omega_i,\omega_i)$$

が成立する。

Q.E.D.

以下、包絡線定理と分布独立性を使って 利得同値定理を証明する

分布独立性より $E[x_i(\omega_i',\omega_{-i})\,|\,\omega_i] = E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega_i',\omega_{-i})]$ は ω_i から独立：

$$\frac{\partial}{\partial\omega_i}E[x_i(\omega_i',\omega_{-i})\,|\,\omega_i] = 0$$

である。よって

$$y_i(\omega_i',\omega_i) \equiv E_{\omega_{-i}}[v_i(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i,\omega_{-i})] - E_{\omega_{-i}}[x_i(\omega_i',\omega_{-i})]$$

を ω_i について偏微分すると

$$y_{i2}(\omega_i',\omega_i) = E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i,\omega_{-i})]$$

になる。$\omega_i' = \omega_i$ とすると、包絡線定理より

$$y_i^*(\omega_i) = \int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E_{\omega_{-i}}[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})]d\omega_i' + y_i^0$$

が成立する。 **Q.E.D.**

6. 1. 3. 効率的配分と VCG Mechanism

以下は、**Private Values**（私的価値）を仮定する。**VCG** メカニズムを再考しよう。

定理 6-4：
Private Values においては、**BIC** をみたす任意の効率的な **Direct mechanism** に対して、それと同じ期待収入、同じ期待利得、同じ期待支払い額をもたらす **VCG** メカニズムが必ず存在する。

つまり
VCG メカニズム（**Pivot mechanism**）よりも期待収入を高めたいのであれば
効率的配分をあきらめるしかない。
効率的配分の達成にこだわる限り
たとえ **DIC** を **BIC** に弱めても期待収入をより高めることはできない。

定理 6-4 の証明：

VCG mechanism は **BIC** をみたす効率的な **direct mechanism** である。

任意の **BIC** をみたす効率的な **direct mechanism** (g, x) に対して、**VCG mechanism** $(g, \hat{x})$ を

$$E_{\omega_{-i}}[h_i(\omega_{-i})] = E_{\omega_{-i}}[x_i(0, \omega_{-i})] + E_{\omega_{-i}}[\sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j(g(0, \omega_{-i}), \omega_j)]$$

をみたすように定める。この時、**VCG mechanism** $(g, \hat{x})$ のタイプゼロの期待利得は (g, x) と同じになる。

よって、同値定理より、この **VCG mechanism** はもとの **direct mechanism** と同じ期待収入　、同じ期待利得、同じ期待支払い額をもたらす。

Q.E.D.

補論：**Belief System** が非対称（$\boldsymbol{P}^1 \neq \boldsymbol{P}^2$）の場合、一位価格入札のＢＮＥは？

Intuition:

入札者１の方が、入札者２より、「低いタイプの可能性」が高いとしよう
入札者１は「弱い立場」入札者２は「強い立場」

入札者１は高めに指値しないと勝ち目はないと判断
入札者２は低めに指値しても勝てると判断
よって
入札者１の方が低いタイプであったとしても、入札者２のタイプとあまり差がなければ
入札者１の指値の方が高くなる

$\Rightarrow$ 非効率配分へ
（二位価格入札との違いに注意）

（以下、より詳しい説明）

効率的配分達成のためには入札者 **1** も **2** も、各々単調増加で対称な戦略

$$s_1(b)=s_2(b) \ \ \text{for all} \ \ b\in[0,1]$$

をプレイする必要がある。戦略プロファイル s が **BNE** になるための条件を考えてみよう。

入札者 **1** の期待利得は　$(\omega_1-b)P^2(s_2^{-1}(b))$

b について最大化すると

$$\frac{\partial}{\partial b}(\omega_1-b)P^2(s_2^{-1}(b))$$

$$=-P^2(s_2^{-1}(b))+(\omega_1-b)p^2(s_2^{-1}(b))\frac{ds_2^{-1}(b)}{db}=0$$

この一階条件が $b=s_1(\omega_1)$ にて成立しなければいけない。対称性（$s_1=s_2$）から

$$-P^2(\omega_1)+(\omega_1-s_1(\omega_1))p^2(\omega_1)\frac{1}{s_1'(\omega_1)}=0$$

$$\therefore \quad \frac{\omega_1-s_1(\omega_1)}{s_1'(\omega_1)}=\frac{P^2(\omega_1)}{p^2(\omega_1)}$$

入札者 **2** についても同様に

$$\frac{\omega_2 - s_2(\omega_2)}{s_2'(\omega_2)} = \frac{P^1(\omega_2)}{p^1(\omega_2)}$$

戦略対称性（$s_1 = s_2$）より、

$$\frac{P^1(b)}{p^1(b)} = \frac{P^2(b)}{p^2(b)} \quad \text{for all} \quad b \in [0,1]。$$

しかしこれは分布対称性（$P^1 = P^2$ ）下でないと成立しない。

Belief System が非対称の場合

一位価格入札のＢＮＥは「非効率」にならざるをえない！

入札者１は入札者２よりも「弱い立場」
(Krishna Ch.4, Proposition 4.4)

つまり、入札者 **1** の方が「**Reverse Hazard Rate**」が低い、つまり
入札者１の方が低い評価である確率が高いとしよう：

$$\frac{p^2(b)}{P^2(b)} > \frac{p^1(b)}{P^1(b)} \quad \text{for all b}$$

よって、一階条件より、

$$\frac{b - s_1(b)}{s_1'(b)} < \frac{b - s_2(b)}{s_2'(b)}$$

入札者１（弱）のほうが **Price discount** しないことを意味する（より高めに指値）：

$$s_1(b) > s_2(b) \quad \text{for all} \quad b \in [0, \infty)$$

よって、

「弱い」入札者（相手から見て低いタイプと予想されている入札者）は
「強い」入札者よりも高めに指値
⇒　非効率配分

モデルが非対称の場合、一位価格入札では配分非効率（二位価格入札では効率的配分）

一位価格入札の方が、二位価格入札より期待収入が高くなることある

売り手は、配分非効率性の代償を払って、一位価格入札を選んで、期待収入アップをもくろむかもしれない

（続く）