

2022年10月25, 28日

第6章：オークション基礎（1）（続き）

## 6.2. 期待収入最大化

経セミ第8回（2013年12月、2014年1月号）

売り手の目的： 効率的配分をゆがめてでも収入を高めたい  
**Remember** 同値定理

売り手独占の強みを利用： 「売り渋って価格を吊り上げよう」

⇒ **最低入札価額（Reserve Price、リザーブ価格）** 設定：  
「この価格以下では落札させない」

標準的ミクロ経済学を思い出せ： 独占価格の設定

### 6.2.1. 例（分布非対称）による説明

入札者2人、非分割財1単位

入札者2のタイプは  $\omega_2 = \frac{1}{2}$   
 入札者1のタイプは  $\omega_1 \in [0,1]$  連続空間（5.1.1の最後の例）

効率的配分は  $g(\omega_1) = 1$  if  $\omega_1 > \frac{1}{2}$   
 $g(\omega_1) = 2$  if  $\omega_1 < \frac{1}{2}$

**Efficiency と BIC と参加制約みたす支払いルール**のベストは

$$\begin{aligned}
 x_1(\omega_1) &= \frac{1}{2} \text{ and } x_2(\omega_1) = 0 && \text{if } \omega_1 > \frac{1}{2} \\
 x_1(\omega_1) &= 0 \text{ and } x_2(\omega_1) = \frac{1}{2} && \text{if } \omega_1 < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

売り手収入は  $\frac{1}{2}$  :

入札者 1 に情報レントとられてしまう。  
 これでは入札者 1 はいなくてもいい

収入同値定理 :

収入をもっと高めたいなら効率的配分あきらめよ!  
**Reserve Price** 設定

入札者 1 に対して  
**Reserve Price**  $y \in [\frac{1}{2}, 1]$  を以下のように設定しよう！

入札者 1 に対しては「 $\omega_1 \geq y$  でないと売らない」  
 そのかわり入札者 2 には  $\frac{1}{2}$  で売る：

$$\begin{array}{ll}
 g(\omega_1) = 1 & \text{if } \omega_1 \geq y \\
 g(\omega_1) = 2 & \text{if } \omega_1 < y \\
 x_1(\omega_1) = y \text{ and } x_2(\omega_1) = 0 & \text{if } \omega_1 \geq y \\
 x_1(\omega_1) = 0 \text{ and } x_2(\omega_1) = \frac{1}{2} & \text{if } \omega_1 < y
 \end{array}$$

この時 **BIC** 成立している

(入札者 1 が正直に振舞うインセンティブについて要確認)

期待収入は  $y\{1 - P^1(y)\} + \frac{1}{2}P^1(y)$

$y$ について期待収入を最大化：一階条件は

$$1 - P^1(y) - yp^1(y) + \frac{1}{2}p^1(y) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} + \frac{1 - P^1(y)}{p^1(y)} \quad (\text{円}) \text{ に Reserve Price を定めよ!}$$

$$g(\omega_1) = 1 \quad \text{if } \omega_1 - \frac{1 - P^1(y)}{p^1(y)} \geq \frac{1}{2}$$

$$g(\omega_1) = 2 \quad \text{if } \omega_1 - \frac{1 - P^1(y)}{p^1(y)} < \frac{1}{2}$$

$(\omega_1 > \frac{1}{2})$  でも入札者 2 に売る：Why?)

## Virtual Valuation (事実上の評価、Marginal Revenue)

入札者 2 に売れば確実に収入  $\frac{1}{2}$  を獲得：

入札者 2 に対する事実上の評価  $\frac{1}{2}$

しかし

タイプ  $\omega_1$  の入札者 1 に売っても  
事実上は  $\omega_1$  を獲得できていない：

∴ 情報レントが発生しているから

タイプが区間  $[\omega_1 + \Delta, 1]$  内の入札者 1 が財獲得  
**Reserve Price** を  $\omega_1 + \Delta$  としよう

$\Delta$  円リザーブ価格を下げると  
 区間  $[\omega_1, 1]$  内の入札者 1 が獲得 (購入確率  $p^1(\omega_1)\Delta$  アップ)  
 よって  $\omega_1 p^1(\omega_1)\Delta$  円収入アップ  
 しかし、一方で、一律  $\Delta$  円 割安になるため  
 $\{1 - P^1(\omega_1)\}\Delta$  円の損失発生 (情報レントの発生)

$\therefore$  売り手の収入増は  $\omega_1 p^1(\omega_1)\Delta$  ではなく

$$\left\{ \omega_1 - \frac{1 - P^1(\omega_1)}{p^1(\omega_1)} \right\} p^1(\omega_1)\Delta$$

タイプ  $\omega_1$  の入札者 1 に対する  
「**Virtual Valuation**（事実上の評価、**Marginal Revenue**）」

$$MR_1(\omega_1) = \omega_1 - \frac{1 - P^1(\omega_1)}{p^1(\omega_1)}$$

収入最大化の鉄則：  
**Virtual Valuation** の高い入札者に売れ！



数値例：一様分布 ( $P^1(\omega_1) = \omega_1$ )

**Virtual Valuation for bidder 1 :**

$$\omega_1 - \frac{1 - P^1(\omega_1)}{p^1(\omega_1)} = \omega_1 - \frac{1 - \omega_1}{1} = 2\omega_1 - 1$$

$$2y - 1 = \frac{1}{2} \text{ (最大化条件) より}$$

$$y = \frac{3}{4} \text{ を Reserve Price に設定せよ!}$$

## 6.2.2. Virtual Valuation についての考察

$$MR_i(a, \omega) \equiv v_i(a, \omega) - v_{i2}(a, \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$$

**解釈：** 一律価格  $h = v_i(a, \omega)$  に対する需要を  $1 - P^i(\omega_i)$  と考えよう  
 需要を限界的に増やして「限界収入  $MR_i(a, \omega)$ 」を計算しよう！

$$\begin{aligned} MR_i(a, \omega) &= \frac{d[v_i(a, \omega)\{1 - P^i(\omega_i)\}]}{d\omega_i} \cdot \frac{d\omega_i}{d\{1 - P^i(\omega_i)\}} \\ &= v_i(a, \omega) - v_{i2}(a, \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)} \end{aligned}$$

この限界収入のことを「事実上の評価 (Virtual Valuation)」と呼ぶ

## Virtual Valuation

$$MR_i(a, \omega) \equiv v_i(a, \omega) - v_{i2}(a, \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$$

評価  $v_i(a, \omega)$      $-$     情報レント  $v_{i2}(a, \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$

情報レントとは？

需要を一単位上げるためには価格を一律  $\frac{v_{i2}(a, \omega)}{p^i(\omega_i)}$  円下げないといけない

$\therefore \frac{v_{i2}(a, \omega)}{p^i(\omega_i)} \{1 - P^i(\omega_i)\}$  円分プレイヤー  $i$  に「情報レント」発生

定理 6-5 :

BIC をみたす直接メカニズム  $(g, x)$  がもたらす期待収入は  
 「Virtual Valuation の和  $\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)$  の期待値」  
 (マイナス  $\sum_{i \in N} y_i^*(0)$  )  
 に等しい :

$$\sum_{i \in N} E[x_i(\omega)] = E\left[\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)\right] - \sum_{i \in N} y_i^*(0)$$

定理 6-5 の証明：同値定理より、期待支払額は

$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega), \omega)] \\ - E_{\omega_i} \left[ \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) | \omega'_i] d\omega'_i \right] - y_i^*(0)$$

分布独立性より、情報レント分は以下のように書き換えられる：

$$E_{\omega_i} \left[ \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) | \omega'_i] d\omega'_i \right] \\ = E \left[ \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) d\omega'_i \right]$$

よって

$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega), \omega)] \\ - E \left[ \int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) d\omega'_i \right] - y_i^*(0)$$

\*証明においてすべきこと：

情報レント分  $E\left[\int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) d\omega'_i\right]$  を書き換えると

$$E\left[v_{i2}(g(\omega), \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}\right]$$

になることを示すこと

情報レント分  $E\left[\int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) d\omega'_i\right]$  の中に  $v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i})$

が登場するのは、 $\omega_i$  が  $\omega'_i$  以上になるケースのみであることに着目せよ。

$\omega_i$  が  $\omega'_i$  以上になる確率は  $1 - P^i(\omega'_i)$  であるから

$$\begin{aligned} & E\left[\int_{\omega'_i=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega'_i, \omega_{-i}) d\omega'_i\right] \\ &= E_{\omega_{-i}}\left[\int_{\omega_i \in \Omega_i} v_{i2}(g(\omega), \omega)\{1 - P^i(\omega_i)\} d\omega_i\right], \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} E[x_i(\omega)] &= E[v_i(g(\omega), \omega)] \\ &\quad - E_{\omega_{-i}}\left[\int_{\omega_i \in \Omega_i} v_{i2}(g(\omega), \omega)\{1 - P^i(\omega_i)\} d\omega_i\right] - y_i^*(0) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。(ここのステップがキモ)

よって、情報レント分は、

$$\begin{aligned}
 & E_{\omega_i} \left[ \int_{\omega_i \in \Omega_i} v_{i2}(g(\omega), \omega) \{1 - P^i(\omega_i)\} d\omega_i \right] \\
 &= E_{\omega_i} \left[ \int_{\omega_i \in \Omega_i} v_{i2}(g(\omega), \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)} p^i(\omega_i) d\omega_i \right] \\
 &= E \left[ v_{i2}(g(\omega), \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)} \right].
 \end{aligned}$$

と書ける。よって

$$E[x_i(\omega)] = E \left[ v_i(g(\omega), \omega) - v_{i2}(g(\omega), \omega) \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)} \right] - y_i^*(0),$$

つまり

$$E[x_i(\omega)] = E[MR_i(g(\omega), \omega)] - y_i^*(0).$$

つまり

$$\sum_{i \in N} E[x_i(\omega)] = E \left[ \sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega) \right] - \sum_{i \in N} y_i^*(0).$$

**Q.E.D.**



### 6.2.3. 期待収入最大化問題

参加制約条件 (Interim Individual Rationality, **IIR**, 中間個人合理性) :

$$y_i^*(\omega_i) = E[v_i(g(\omega), \omega) + x_i(\omega) | \omega_i] \geq 0$$

### 期待収入最大化問題

**BIC** と **IIR** の制約下で期待収入を最大化せよ！

$$\max_{(g,x)} E\left[\sum_{i=1}^n x_i(\omega)\right] \text{ subject to BIC and IIR}$$

追加の仮定: 「タイプゼロの時の評価最低」とする:

$$v_i(a, \omega) \geq v_i(a, (\mathbf{0}, \omega_{-i})) \text{ for all } a \in A, i \in N, \text{ and } \omega \in \Omega$$

ならば、**IIR** (参加制約) を

$$y_i^*(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ for all } i \in N$$

としてよい。

さらに、**BIC** をみたす支払ルール  $x$  が存在する配分ルール  $g$  の全体集合を  $\hat{G}$  とする。

定理 6-6 : BIC および IIR の制約下での期待収入最大化問題は

$$\max_{g \in \hat{G}} E\left[\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)\right]$$

に等しい。

期待収入最大化問題の解法例 :

限界収入の和の期待値  $E\left[\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)\right]$  を、 $\hat{G}$  ではなく

配分ルール全体集合  $G$  (一般的に  $\hat{G} \neq G$ 、 $\hat{G} \subset G$ ) について最大化

$$\max_{g \in G} E\left[\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)\right]$$

この解を  $\bar{g}$  と記す。

定理 6-2 (支払同値) で示される支払いルール (のひとつ) を  $\bar{x}$  と記す  
分布独立性下で  $(\bar{g}, \bar{x})$  が BIC をみたすかどうかをチェックする

BIC をみたすならば、 $\bar{g} \in \hat{G}$  が成立している

この場合には、もとめた  $(\bar{g}, \bar{x})$  は、期待収入最大化メカニズムである

**6.2.4. 期待収入最大化問題の例：**  
**単一財一単位**  
**(Private Values を仮定)**

リザーブ価格付きの二位価格入札ルールが期待収入を最大化することを示そう

$$\begin{aligned}
 v_i(a, \omega_i) &= 0, & MR_i(a, \omega_i) &= 0 & \text{if } a \neq i \\
 v_i(a, \omega_i) &= \omega_i, & MR_i(a, \omega_i) &= \omega_i - \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)} & \text{if } a = i
 \end{aligned}$$

**Virtual Valuation** が一番高く  
しかも非負である入札者に落札せよ

$$\begin{aligned}
 MR_i(i, \omega_i) &\geq MR_i(j, \omega_j) \text{ for all } j \neq i & \text{if } g(\omega) = i \\
 g(\omega) &= 0 \text{ (売らない)} & \text{if } MR_i(i, \omega_i) < 0 \text{ for all } i \in N
 \end{aligned}$$

このように特定した配分ルール  $g$  が **BIC** になるかどうか  
チェック！

仮定（単調増加）： $MR_i(i, \omega_i) = \omega_i - \frac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$  は  $\omega_i$  の増加関数

仮定（分布対称性）： $p^i(\omega_i) = p^i(\omega_j)$  if  $\omega_i = \omega_j$

これらの仮定より

$$[MR_i(i, \omega_i; p^i) \geq MR_j(j, \omega_j; p^j)] \Leftrightarrow [\omega_i \geq \omega_j]$$

評価がより高い入札者はより高い **Virtual Valuation**

## リザーブ価格付きの二位価格入札

指値が一番高く、リザーブ価格より高い指値をした入札者が落札  
 そうでなければ非落札（売らない）  
 落札者は二位価格とリザーブ価格の大きい方を支払う

単調増加＋分布対称性の仮定下で

リザーブ価格付き二位価格入札は

評価価値が一番高く、リザーブ価格  $y$  以上である入札者に落札

$$\begin{array}{ll}
 \omega_i \geq \omega_j \text{ for all } j \neq i & \text{if } g(\omega) = i \\
 g(\omega) = 0 & \text{if } \omega_i < y \text{ for all } i \in N
 \end{array}$$

Reserve Price  $y$  を以下のように設定：

$$MR_1(1, y) = y - \frac{1 - P^1(y)}{p^1(y)} = 0$$

**Virtual Valuation** が非負の入札者にのみ落札される

仮定より、評価の高い入札者は高い **Virtual Valuation**

∴ リザーブ価格付きの二位価格入札が  
期待収入最大化を実現！



## 6.2.5. 参入促進の効果

**Bulow and Klemperer (1996): Auctions versus Negotiations, American Economic Review**

単一財一単位取引再考：

リザーブ価格：コミットメントできることが暗黙の仮定

コミットメント効かない：売れ残り認められない

売れ残りを認めない場合の最大化期待収入

$$E[\max[MR_1(\omega_1), \dots, MR_n(\omega_n)]]$$

正負に関係なく **Virtual Valuation** の一番高い人に売る

定理 6-7 (Bulow and Klemperer (1996)) :

$$E[\max[MR_1(\omega_1), \dots, MR_n(\omega_n), MR_{n+1}(\omega_{n+1})]] \\ > E[\max[MR_1(\omega_1), \dots, MR_n(\omega_n), 0]]$$

リザーブ価格設定よりも  
もう一人新しい入札者 (どんな奴でも **OK**) を参入させる方が  
収入アップに効果的

リザーブ価格設定 :

**Virtual Valuation** が非負の入札者 (1 ~ n) がいない

⇒ 評価ゼロの人つまり売り手自身にタダであげている (捨てるのと同じ)

n + 1 人目を連れてくる :

**Virtual Valuation** が非負の入札者 (1 ~ n) がいない

⇒ n + 1 人目に売れ !

(続く)