

2022年11月4日

## 第8章：オークション（応用編）

オークション基礎編	<b>Private Values:</b>	単一財取引 as special case <b>VCG in general</b> <b>(Individual incentive)</b>
	<b>Interdependent Values:</b>	<b>Winner's Curse</b> <b>Linkage Principle</b>
オークション応用編	<b>Private Values</b>	<b>Multi-unit</b> <b>Multi-Object (position)</b> <b>Multi-Object (package)</b> <b>Cartel</b> <b>(Collective incentive)</b>
	<b>Interdependent Values</b>	

## 8.1. Multi-Unit Auction

単一財を複数単位売却する

**Sequential auction :**

一単位ずつ売却

ピカソのリトグラフ、ビンテージワインなど  
アノマリー

**Simultaneous Auction :**

一度に売却：本節のテーマ

国債（金融資産）発行市場： 非分割財

電力市場： 分割可能財

## 8. 1. 1. Multiunit Auction の 4 つの代表的オークション・ルール

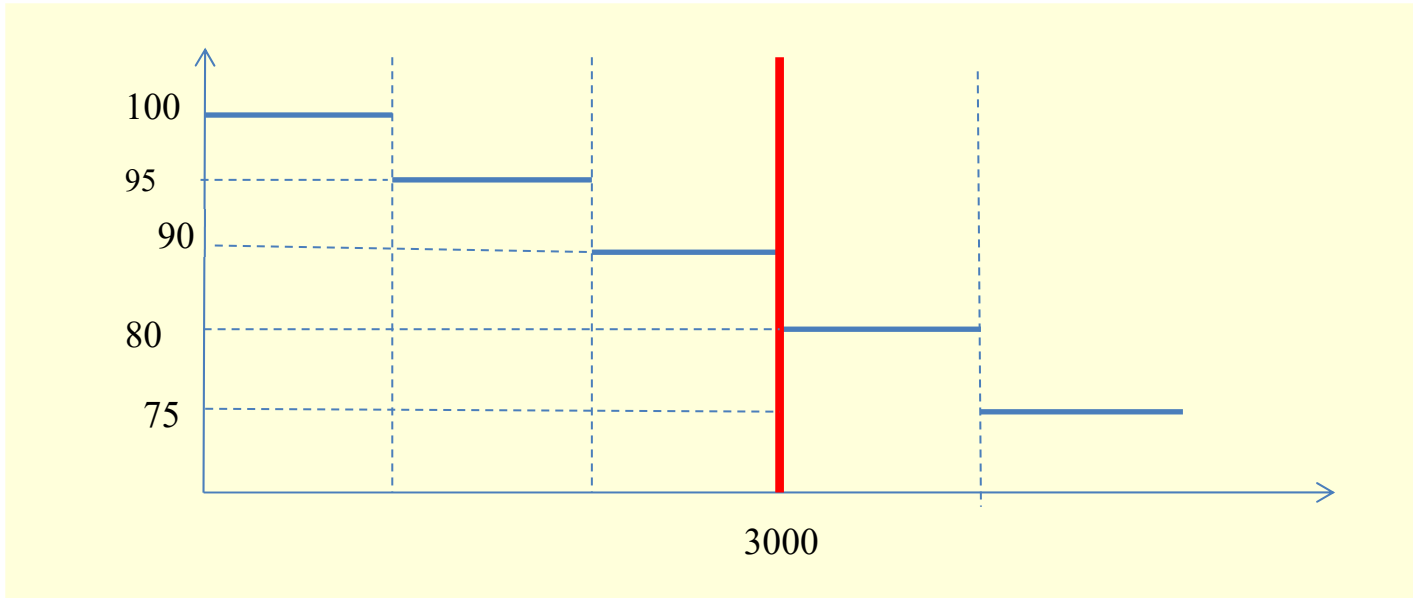
- 封印型 :
- Discriminatory Auction** (差別価格入札) :
    - 一位価格入札の拡張
    - 伝統的な国債発行入札 (日本、英国、ドイツ、フランス…)
  - Uniform Price Auction** (一律価格入札) :
    - 二位価格入札のある意味での拡張 (しかし VCG ではない)
    - アメリカの国債発行入札
- 公開型 :
- Ascending Clock Auction** (せり上げクロック入札) :
    - せり上げの拡張 (非常にポピュラー)
    - 電波オークション
  - Descending (Clock) Auction** (せり下げクロック入札) :
    - せり下げの拡張
    - 花卉オークション

## 数値例

単一種財 3000 単位を入札で売却：

<b>Bidder 1:</b>	1 単位 75 円で	1000 単位購入希望
<b>Bidder 2:</b>	1 単位 100 円で	1000 単位購入希望
<b>Bidder 3:</b>	1 単位 95 円で	1000 単位購入希望
<b>Bidder 4:</b>	1 単位 80 円で	1000 単位購入希望
<b>Bidder 5:</b>	1 単位 65 円で	1000 単位購入希望
<b>Bidder 6:</b>	1 単位 90 円で	1000 単位購入希望

⇒ 上位の **Bidders 2, 3, 6** に 1000 単位ずつ売却：効率的配分（正直なら）



## Discriminatory auction (差別価格入札)

封印型

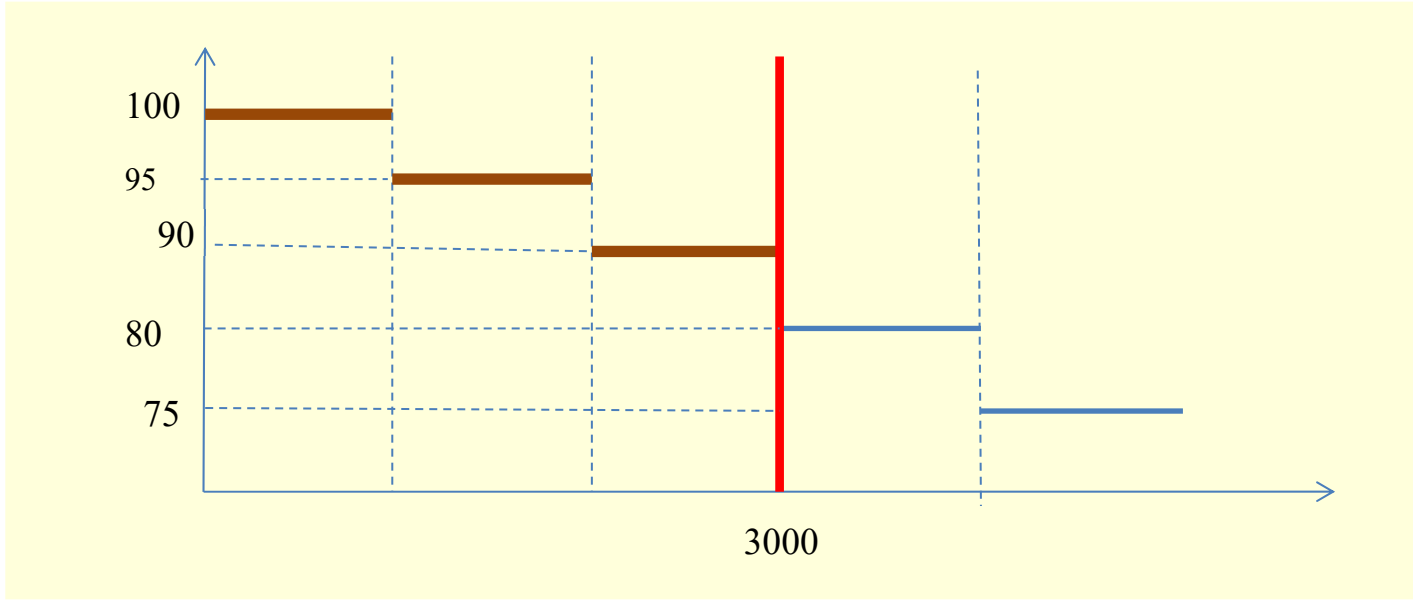
本人の言い値で売却：

**Bidder 2:** 100円 × 1000単位 = 100000円支払う

**Bidder 3:** 95円 × 1000単位 = 95000円支払う

**Bidder 6:** 90円 × 1000単位 = 90000円支払う

計  $100000 + 95000 + 90000 = 285000$  円の収入



より厳格な定義：  
各入札者に「需要関数」を表明してもらおう

入札者  $i \in N$  は

「一単位目に 110 円、2 単位目に 90 円、3 単位目に 80 円、4 単位目に 79 円、...、  
2999 単位目に 2 円、3000 単位目に 1 円払っていい」と表明

つまり需要関数を表明：

$D_i : [0, \infty) \rightarrow \{0, \dots\}$  : 右下がりの関数

「任意の単位価格  $p \in \{0, 1, \dots\}$  における私の需要は  $D_i(p)$  単位です」

表明された総需要関数は  $D : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$  ( $D(p) \equiv \sum_{i \in N} D_i(p)$ )



固定量  $S$  単位が供給されるとすると：

需給均衡  $D(p) = S$  をみたす（最低）価格  $p$  より高い **Willingness to Pay** の需要が取引対象

取引価格は各単位における「**Willingness to Pay**」（差別価格）に設定される

$P = 80$  ならば入札者  $i$  は 3 単位購入

1 単位目 110 円、2 単位目 90 円、3 単位目 80 円

合計  $110 + 90 + 80 = 280$  円支払う。

## Uniform Price Auction (一律価格入札)

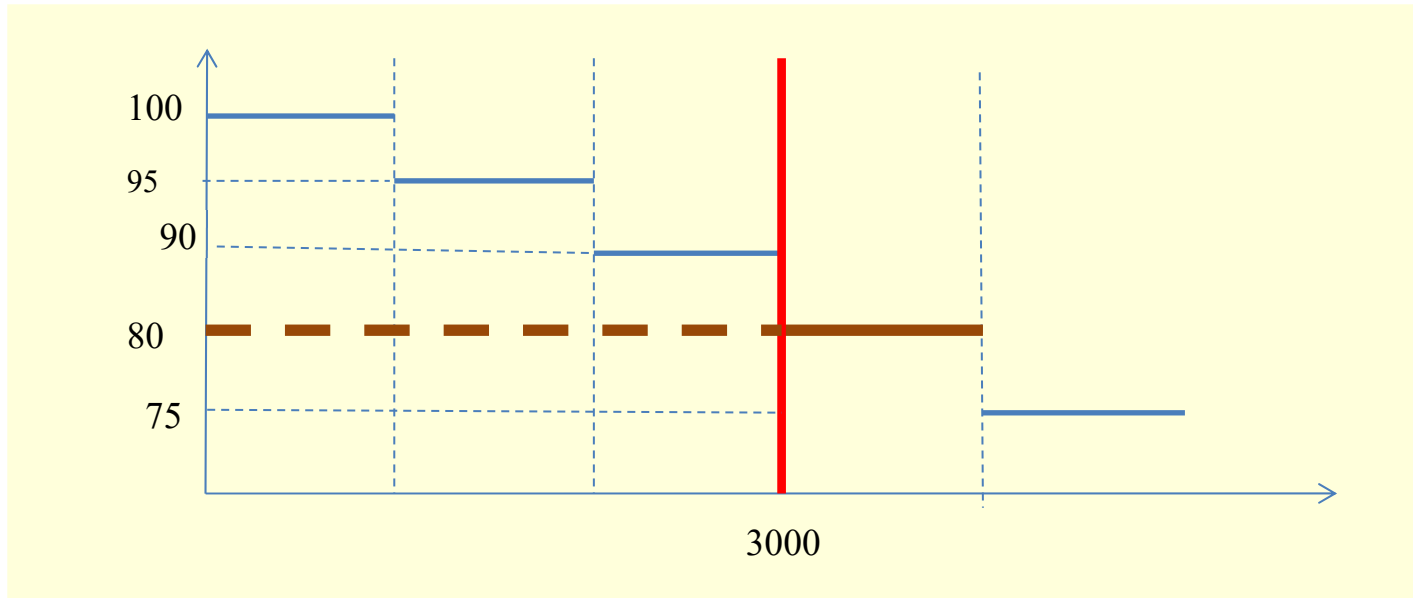
実務ではこれを **Dutch auction** と呼ぶので要注意。通常 **Dutch Auction** はせり下げを意味する

### 封印型

最低落札価格（90円）と最高非落札価格（80円）の間の任意の一律価格で売却  
理論の慣例として、**最高非落札価格80円**とする

VCGとは異なる意味合いにおいて「二位価格入札」の拡張（後述）

<b>Bidder 2:</b>	<b>80円</b>	×	<b>1000単位</b>	=	<b>80000円</b> 支払う
<b>Bidder 3:</b>	<b>80円</b>	×	<b>1000単位</b>	=	<b>80000円</b> 支払う
<b>Bidder 6:</b>	<b>80円</b>	×	<b>1000単位</b>	=	<b>80000円</b> 支払う
計	<b>80000 + 80000 + 80000 = 240000円</b> の収入				



より厳格な定義：  
各入札者に需要関数を表明してもらう

入札者  $i \in N$  は

「一単位目に 110 円、2 単位目に 90 円、3 単位目に 80 円、4 単位目に 79 円、...,  
2999 単位目に 2 円、3000 単位目に 1 円払っていい」と表明

つまり需要関数を表明：

$D_i : [0, \infty) \rightarrow \{0, \dots, \}$  : 右下がりの関数

「任意の単位価格  $p \in \{0, 1, \dots\}$  に対する需要は  $D_i(p)$  単位です」

表明された総需要関数は  $D : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1, \dots\}$  ( $D(p) \equiv \sum_{i \in N} D_i(p)$ )

(ここまでは **Discriminatory Auction** と同じ)

固定量  $S$  単位が供給されるとすると：

需給均衡  $D(p) = S$  をみたす (最低) 価格  $p$  より高い **Willingness to Pay** の需要  
が取引対象

取引価格は「一律  $p$  円」

$P = 80$  ならば入札者  $i$  は 3 単位購入：合計  $80 \times 3 = 240$  円支払う。

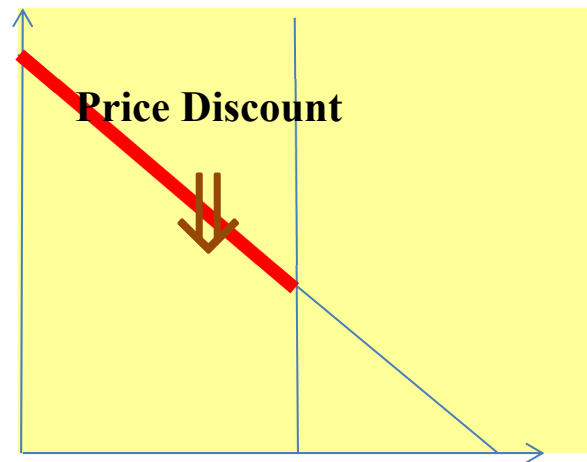
## Discriminatory Auction と Uniform Price Auction どっちがいい？

甲乙つけがたし： 理論的にも実証的にもなんともいえない  
理論： **Bach and Zender (93)**  
実証： **Archibald and Malvey (1998), Hortaçsu and McAdams (2010)**

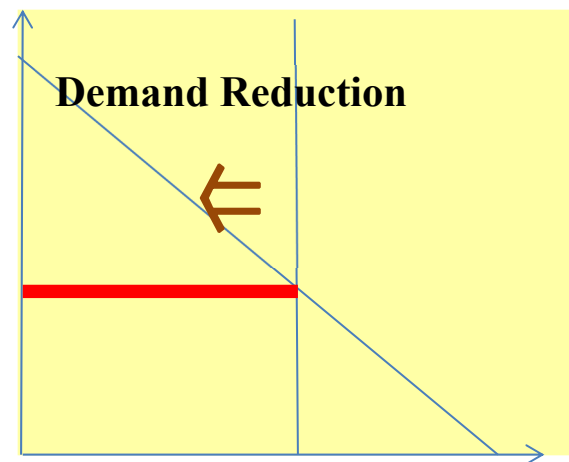
**Discriminatory Auction** の問題点： **Price Discount**  
安く指値しようとする  
その結果低価格、非効率も

**Uniform Price Auction** の問題点： **Demand Reduction**  
少なめに需要表明しようとする  
その結果低価格、非効率も

**Discriminatory** では「**Price Discount**」発生



**Uniform Price Auction** では「**Demand Reduction**」発生



## Ascending Clock Auction (せりあげクロック入札)

公開型 : High Popularity

セリ人 (オークショニア) が単位価格をせりあげる

入札者はセリ人の公示価格にたいして需要を表明

総需要が供給をうわまわれれば、さらにせりあげ

総需要と供給が一致すると、せり上げ終了

**せり終了時の単位価格 (一律価格)** ですべての単位を取引する



たとえば入札者  $i \in N$  は

「1円まで 3000 単位、2円まで 2999 単位,..., 79円まで 4 単位、80円まで 3 単位  
90円まで 2 単位、110円まで 1 単位、それを超えると需要ゼロ」

という戦略をとるとしよう

一律価格が 80円ならば入札者は 3 単位を一律 80円合計 240円支払うことになる

「せりあげクロック式 (公開型)」は「一律価格入札 (封印型)」  
と同じゲームになる

(せり上げ入札と二位価格入札との類似に対応)

「Demand Reduction」という非効率性問題を抱える

## Descending Clock Auction (せりさげクロック式)

### 花卉 (かき) オークション

アールスメール (アムステルダム)



大田区大田市場



## 公開型

せり人（オークション）が単位価格を高水準から徐々にせり上げていく

入札者は競り人の公示価格にたいして需要を表明する

需要を追加表明した時点での価格で随時取引成立

総需要が供給をたまわれる限り、さらにせり上げる

総需要と供給が一致すると、せり上げ終了

たとえば入札者  $i \in N$  は

「110 円を超える価格ならば需要ゼロ、110 円にて 1 単位需要表明  
90 円にて追加一単位 (2 単位目)、80 円にて追加一単位 (3 単位目)  
79 円にて追加一単位 (4 単位目) , ...,  
2 円にて追加 1 単位 (2999 単位目)、1 円にて追加 1 単位 (3000 単位目)」

という戦略をとるとしよう

せりあげ終了時の価格が 80 円ならば、この入札者は一単位目を 110 円、2 単位目  
を 90 円、3 単位目を 80 円  
合計 3 単位を、合計  $110 + 90 + 80 = 280$  円支払って購入

「せりさげクロック式 (公開型)」は「差別価格入札 (封印型)」  
と同じゲームになる  
(せりさげ入札と 1 位価格入札との類似に対応)

「Price Discount」という非効率性問題を抱える

## 8. 1. 2. Vickrey Auction (VCG メカニズム)

4 つの標準的なオークション・ルールでは一般的に  
優位戦略は存在しない

(Price discount, Demand reduction)

効率的配分が達成される保証もない  
つまり VCG メカニズムではない！

**Multiunit Auction** における  
VCG メカニズムはどのような方式になるか？

**Vickrey Auction !**

## Vickrey Auction (VCG Mechanism in Multiunit Allocation)

$K \geq 2$  units 供給

入札者のタイプ :  $\omega_i = (\omega_i^1, \dots, \omega_i^K) \in \Omega_i$

$\omega_i^k$  とは : Bidder  $i$ 's valuation for  $k$ -th additional purchase

$$\omega_i^1 \geq \omega_i^2 \geq \dots \geq \omega_i^K \geq 0$$

配分 :  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$

$$\sum_{i \in N} a_i \leq K$$

$a_i \in \{0, \dots, K\}$  とは : Number of bidder  $i$ 's purchases

入札者  $i$  の利得 :  $v_i(a, \omega_i) = \sum_{k=1}^{a_i} \omega_i^k$

**Vickrey Auction  $(g, x)$  の定義 :**  
**(VCG メカニズムを Multi-Unit に応用)**

効率的配分ルール  $g$

財評価の高い順に割り当てる :

任意の  $i \in N$ , 任意の  $j \in N$ , 任意の  $\omega$  について

$$\omega_i^{a_i} \geq \omega_j^{a_j+1}, \text{ where } g(\omega) = a = (a_i)_{i \in N}$$

支払ルール  $x_i$

入札者  $i$  以外の入札者の  $(n-1)K$  個の財評価

$\{\omega_j^k\}_{k \in \{1, \dots, K\}, j \in N \setminus \{i\}}$  を

大きい値から順番にならべよ！

$$\delta^1(\omega_{-i}, i) \geq \delta^2(\omega_{-i}, i) \geq \dots \geq \delta^{(n-1)K}(\omega_{-i}, i)$$

For each  $h \in \{1, \dots, (n-1)K\}$ ,

there exists  $(j, k) \in (N \setminus \{i\}) \times \{1, \dots, K\}$  such that

$$\delta^h(\omega_{-i}, i) = \omega_j^k.$$



支払いルールを

$$x_i(\omega) = \sum_{k=K-a_i+1}^K \delta^k(\omega_{-i}, i), \text{ where } a = g(\omega)$$

と特定化

入札者  $i$  以外の評価のうち、 $K - a_i + 1$  番目から  $K$  番目までの計  $a_i$  個を足したものの。

うしろの  $a_i$  個は入札者  $i$  に取られてしまう。よって値  $\sum_{k=K-a_i+1}^K \delta^k(\omega_{-i}, i)$

は「入札者  $i$  が加わったことによって他の人が被る損失分」！

例で考えよう： $K = 5$ 、 $n = 5$

	1 単位目	2 単位目	3 単位目	4 単位目
入札者 1	100	51	11	9
入札者 2	120	102	73	10
入札者 3	60	45	35	20
入札者 4	70	12	0	0
入札者 5	80	75	74	55

入札者 1 が払う額は 74 円  
 入札者 2 が払う額は  $74 + 70 = 144$  円  
 入札者 3 が払う額は 0 円  
 入札者 4 が払う額は 0 円  
 入札者 5 が払う額は  $73 + 70 = 143$  円  
 (Think why)

### 8. 1. 3. Ausubel Mechanism

**Vickrey Auction (VCG)** は残念ながら実際にはほとんど使われていない  
 様々な理由あり：例えば

「支払い額がどのように決まるか入札者にわかりづらい」

一方、「公開型（せりあげ）」は一般にわかりやすいとされる：  
 せり上げの途中で支払価格が明らかにされていく  
 観察された価格情報をもとに指値の判断をすると楽

#### **Cognitive Psychology:**

##### **Hypothetical Thinking**（仮説的思考）

「頭の中で相手の出方についてあれこれ仮説を立てて考える」  
 苦手

##### ⇒ **Information Extraction from Observations**

「観察されたものに反応する」  
 こっちの方が楽（cf. ローマ帝国帝位は反例）

## Ausubel Mechanism

オースベルによって提案された

**Vickrey Auction** の公開型バージョン

わかりやすい入札ルールへの提案（まだあまり普及していないが）

「せり上げの途中で購入が確実になった場合  
購入が確実になった時点の価格で  
購入確実になった単位分が取引される」

とする公開型入札ルール

例で考えよう： $K = 5$ 、 $n = 5$

	1 単位目	2 単位目	3 単位目	4 単位目
入札者 1	<b>100</b>	<b>51</b>	<b>11</b>	<b>9</b>
入札者 2	<b>120</b>	<b>102</b>	<b>73</b>	<b>10</b>
入札者 3	<b>60</b>	<b>45</b>	<b>35</b>	<b>20</b>
入札者 4	<b>70</b>	<b>12</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
入札者 5	<b>80</b>	<b>75</b>	<b>74</b>	<b>55</b>

セリ人がゼロ円からせりあげ  
需要は正直表明（インセンティブも OK）

価格が 69 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位 :	自分以外の需要は 7 単位
入札者 2 は 3 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 3 は 0 単位 :	自分以外の需要は 8 単位
入札者 4 は 1 単位 :	自分以外の需要は 7 単位
入札者 5 は 3 単位 :	自分以外の需要は 5 単位

自分以外の需要は供給量 5 以上 : 自分以外に財を配分したら一単位も残らない

価格が 70 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位 : 自分以外の需要は 6 単位  
入札者 2 は 3 単位 : 自分以外の需要は 4 単位  
入札者 3 は 0 単位 : 自分以外の需要は 7 単位  
入札者 4 は 0 単位 : 自分以外の需要は 7 単位  
入札者 5 は 3 単位 : 自分以外の需要は 4 単位

入札者 2 および入札者 5 については自分以外の需要は供給量 5 未満 (4) :  
自分以外に財を配分しても 1 単位のこる

よって、入札者 2 と 5 は、この時点で各々 1 単位の購入が確定する

価格は確定時の価格 70 円とする

価格が 73 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 2 は 2 単位 :	自分以外の需要は 4 単位
入札者 3 は 0 単位 :	自分以外の需要は 6 単位
入札者 4 は 0 単位 :	自分以外の需要は 6 単位
入札者 5 は 3 単位 :	自分以外の需要は 3 単位

入札者 5 は 2 単位目の購入が確定 :

価格は 73 円とする



価格が 74 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位 :	自分以外の需要は 4 単位
入札者 2 は 2 単位 :	自分以外の需要は 3 単位
入札者 3 は 0 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 4 は 0 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 5 は 2 単位 :	自分以外の需要は 3 単位

入札者 1, 2 は各々 1 単位目、 2 単位目の購入が確定 :

価格は 74 円とする

この段階で  
「入札者 1 は 1 単位、入札者 2 は 2 単位、入札者 5 は 2 単位」  
合計 5 単位すべて確定

せり上げの途中で  
落札価格が購入単位ごとに確定する手順がわかるので  
入札者に混乱はあまりないはず

(いかがでしょうか?)

(続く)