2022 年 12 月 5 日

第 10 章：意思決定理論（１）

10.1. 意思決定（Decision Making）とは？

消費者行動理論（２財のケース）：

選択肢全体集合	$X=[0,\infty)^2$
選好関係	無差別曲線群
選択肢集合	$B\subset X$（あるいは $B\in 2^X\setminus\{\phi\}$）
	予算集合（予算 Y 円、財 1 p_1 円、財２ p_2 円） $B=\{x\in X \mid p_1x_1+p_2x_2\le Y\}\subset X$
選択ルール	$C:2^X\setminus\{\phi\}\to X$, $C(B)\in B$ for all $B\in 2^X$ 需要関数

経済主体（消費者、事業者、会社組織、政府、**......**）
はさまざまな意思決定問題に直面している

意思決定問題（一般）：

選択肢全体集合	$\boldsymbol{X}$
選好関係	$\succsim$ (あるいは $\boldsymbol{u}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{R}$)
選択肢集合	$\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{X}$（あるいは $\boldsymbol{B}\in\mathbf{2}^{X}\setminus\{\phi\}$）
選択ルール	$\boldsymbol{C}:\mathbf{2}^{X}\setminus\{\phi\}\to\boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{B}$ **for all** $\boldsymbol{B}\in\mathbf{2}^{X}\setminus\{\phi\}$

意思決定問題の二つの視点

予測（本章）： 選択ルール $C:2^X \to X$ の導出
選好関係 $\succsim$ が与えられた時、任意の選択肢集合 $B \subset X$ から何を選択するか？

推定（第 11 章）： 選好関係 $\succsim$ の導出
選択ルール $C:2^X \to X$ についてのデータが与えられた時、背後にどのような選好関係 $\succsim$ が想定されるか？

「予測」と「推定」はフィードバックの関係

10.2. 選好（Preference）

あなたは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のどっちがよりお好き？

選好関係（二項関係） $\succsim$

$\boldsymbol{x} \succsim \boldsymbol{y}$　　$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ より選好する、あるいは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は無差別である

$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$　　$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は無差別である

$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$　　$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ より選好する

選好順序（Preference Ordering）

「完備性」と「推移性」をみたす選好関係

合理的経済主体の仮定：

全選択肢について「順序付け」している

（首尾一貫した選好関係）

完備性（Completeness）：　どの選択肢間についても選好の比較ができる

任意の選択肢 $x \in X$、$y \in X$ について

$$\text{either } x \succsim y \text{ or } y \succsim x$$

が成立する

＊「不完備性」と「無差別」は違う概念であることに注意せよ

推移性（Transitivity）：　　好き嫌いがサイクルにならない

任意の選択肢 $x \in X$、$y \in X$、$z \in X$ について

$$[x \succsim y \ \text{ and } \ y \succsim z] \Rightarrow [x \succsim z]$$

＊ 推移性をみたさない非合理な人（グーチョキパー的な人）：
「バナナよりミカンが好き」
「ミカンよりリンゴが好き」
「リンゴよりバナナが好き」（？）

10.3. 効用関数

選好順序（完備性＋推移性）は
「数字の大小」関係に置き換えることができる

効用関数 $$u : X \to R$$

$$[x \succsim y] \Leftrightarrow [u(x) \geq u(y)]$$

効用関数の値 $u(x)$ 自体には意味がない
大小関係のみが重要（序数的効用）

正単調変換からの不変性

任意の増加関数 $k : R \to R$ について

$$v(x) = k(u(x)) \ \text{for all} \ x \in X$$

とすると、v もまた $\succsim$ の効用関数になる（大小関係は不変だから）：

$$[x \succsim y] \Rightarrow [v(x) \geq v(y)]$$

効用関数は数学的に扱いやすい点で便利である

消費者の効用関数（2 財）：$u(x_1, x_2)$
単調増加、偏微分可能を仮定

偏微分：　一方を固定して他方だけで微分（ラウンド・ディー ∂）

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \ (= u_1(x_1, x_2)), \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \ (= u_2(x_1, x_2))$$

例：

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 - (x_1)^2 - 3(x_2)^2$$

$$u_1(x_1, x_2) = x_2 - 2x_1$$
$$u_2(x_1, x_2) = x_1 - 6x_2$$

全微分：

無差別曲線（効用のレベル U 一定）

$$u(x_1, x_2) \equiv U$$

効用のレベルを U に維持したまま（同一無差別曲線上で）

x_1 と x_2 を微小動かす：

$$u_1(x_1, x_2)\Delta x_1 + u_2(x_1, x_2)\Delta x_2 = 0$$

$$MRS \equiv -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=\text{constant}} = \frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)}$$

予算制約条件付き効用最大化：

Maximize $u(x_1, x_2)$ subject to $p_1 x_1 + p_2 x_2 = Y$

ラグランジュ乗数法：ラグランジュ乗数を $\lambda \in R$ として

Maximize $u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - Y)$
with respect to $(x_1, x_2) \in [0, \infty)^2$

一階条件： $u_1(x_1, x_2) + \lambda p_1 = 0$
$u_2(x_1, x_2) + \lambda p_2 = 0$
をみたす (x_1, x_2, λ) を導出：

$$\frac{u_1(x_1, x_2)}{p_1} = -\lambda = \frac{u_2(x_1, x_2)}{p_2}$$

$$\therefore \quad MRS \equiv \frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

生産者の最適化も意思決定問題の一例である

Maximize $p_1 x_1 + p_2 x_2 - c(x_1, x_2)$

一階条件： $p_1 = \dfrac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ （$= c_1(x_1, x_2)$）

$p_2 = \dfrac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ （$= c_2(x_1, x_2)$）

$$\therefore \quad MRT \equiv \frac{c_1(x_1, x_2)}{c_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

10.2. 不確実性下の意思決定

不確実性：　どの選択肢が選ばれるかわからない

株式：　株価アップ？ダウン？
投資：　成功？失敗？

不確実性下の意思決定：　多くの経済問題は不確実性下にある

不確実な選択を
単純くじ（simple Lottery） $L: X \to [0,1]$ ととらえる：

各選択肢 $x \in X$ は確率 $L(x)$ で選ばれる（$\sum_{x \in X} L(x) = 1$）

株式： 確率 **30%** で明日の株価 **10** 円アップ
確率 **70%** で明日の株価 **5** 円ダウン

投資： 確率 **10%** で成功（**100** 億円の収益）
確率 **90%** で失敗（**10** 億円の損失）

単純くじの全体集合を Ψ と表記する

退化くじ（**degenerate lottery**）：　$[L(x)=1] \Rightarrow [u(L)=u(x)]$

確実に選択肢 x が選ばれる

混合くじ（**Compound Lottery**）：　くじを選ぶくじ

確率 p でくじ L、確率 $1-p$ でくじ L' が選ばれる

帰結主義の仮定（Consequentialism）

混合くじを単純くじに還元できるとする仮定をおく

確率 p でくじ L、確率 $1-p$ でくじ L' が選ばれる混合くじを

各選択肢 $x \in X$ が確率 $pL(x)+(1-p)L'(x)$ で選ばれる単純くじと無差別とみなす

この単純くじは $pL+(1-p)L'$ と表記される

意思決定者は
くじ全体集合 Ψ について選好順序 $\succsim$ をもつ

くじ全体に対する効用関数：$u : \Psi \to R$

任意のくじ $L \in \Psi$、$L' \in \Psi$ について

$$[L \succsim L'] \Leftrightarrow [u(L) \geq u(L')]$$

正単調変換からの独立性の性質より
特定の選好順序を表現する効用関数はたくさんありうるが
その中でも期待効用関数による表現に着目！

選好順序 $\succsim$ が（完備性と推移性とともに）
追加条件（独立性と連続性、後述）をみたす場合
任意のくじ L にたいする効用は、効用の期待値

$$u(L)=\sum_{x\in X}L(x)u(x)$$

として表現することができる（期待効用）

期待効用は便利：
複雑なくじの効用も効用の期待値を計算しさえすれば **OK**

10.3. 期待効用（Expected Utility）

二つの追加条件：連続性、独立性

連続性（Continuity）：

任意のくじ $L \in \Psi$、$L' \in \Psi$、$L'' \in \Psi$ について

$$pL' + (1-p)L'' \succsim L \quad \text{をみたす} \quad p \in [0,1] \quad \text{全体の集合}$$

$$L \succsim pL' + (1-p)L'' \quad \text{をみたす} \quad p \in [0,1] \quad \text{全体の集合}$$

がともに閉集合である。

「わたしは **60**%を上回る確率で **100** 円もらえるくじには **50** 円払ってもいい。
わたしは **60**%を下回る確率で **100** 円もらえるくじには **50** 円払いたくない。
だから、ちょうど **60**%で **100** 円もらえるくじと **50** 円は無差別である。」

独立性（Independence）：期待効用のカギとなる条件

任意のくじ $L \in \Psi$、$L' \in \Psi$、$L'' \in \Psi$、任意の $p \in [0,1]$ について

$$[L \succsim L'] \Rightarrow [pL + (1-p)L'' \succsim pL' + (1-p)L'']$$

独立性の含意

二つのくじ　　　　　**L**＝（１００円：３０％、５０円：３０％、０円：４０％）
L'＝（１００円：２９％、５０円：３２％、０円：３９％）

どっちが好き？「よく似てるからわからん…」

では、質問をかえて
L'＝（１００円：２９％、５０円：３２％、０円：３９％）
L"＝（１００円：４５％、５０円：０％、０円：５５％）

どっちが好き？「随分違うからわかる。**L"**の方が **L'**より好き」

ならば、あなたは **L'**よりも **L** を選ぶべきだ！

$$\because \quad [L'' \succsim L'] \Rightarrow [L = \tfrac{1}{16}L'' + \tfrac{15}{16}L' \succsim \tfrac{1}{16}L' + \tfrac{15}{16}L' = L']$$

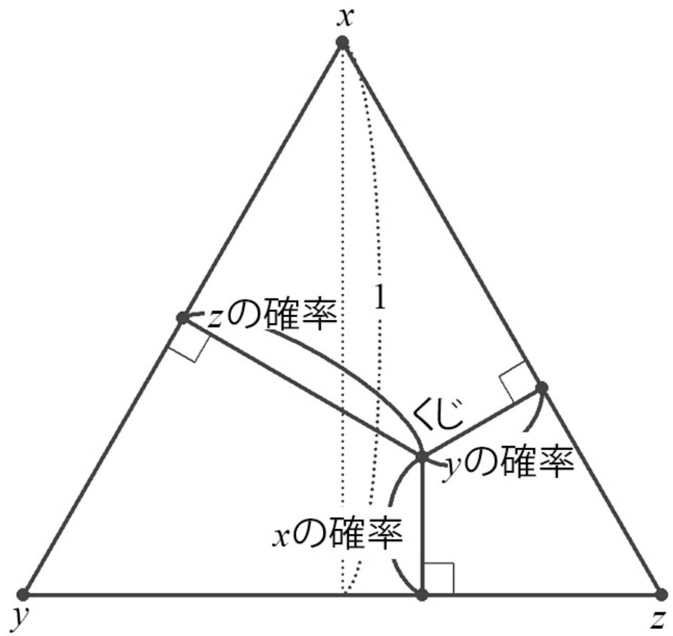
100 円： $30\% = (45 \times \tfrac{1}{16} + 29 \times \tfrac{15}{16})\%$

50 円： $30\% = (0 + 32 \times \tfrac{15}{16})\%$

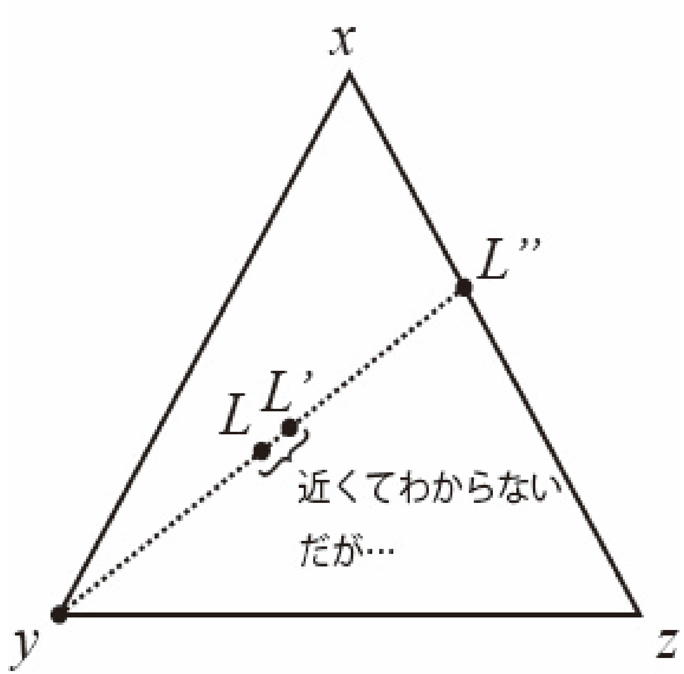
0 円： $40\% = (55 \times \tfrac{1}{16} + 39 \times \tfrac{15}{16})\%$

イメージ図

単純くじ全体集合



独立性（選好早わかり）



定理（期待効用）：

選択肢全体の集合 $\mathbf{X}$ を有限集合とする。単純くじ全体集合 $\boldsymbol{\Psi}$ についての選好順序 (完全性と推移性) $\succsim$ が独立性と連続性をもみたすとき、$\succsim$ は期待効用関数であらわすことができる。つまり、関数 $u: X \to R$ が存在して、任意のくじ $L \in \Psi$ の効用を、効用の期待値

$$u(L) = \sum_{x \in X} L(x) u(x)$$

であらわすことができる。

証明：期待効用関数の作り方

１番好きな選択肢と１番嫌いな選択肢 $\bar{x}$ と $\underline{x}$ を選び、$u(\bar{x})=1$、$u(\underline{x})=0$ と定める。

任意の $p\in(0,1)$ について、$\bar{x}$ と $\underline{x}$ についてのくじ $L[p]$（確率 p で $\bar{x}$、確率$1-p$ で $\underline{x}$）の効用を

$$u(L[p])=p$$

と定める。

連続性より、任意の選択肢 $x\in X$ について、必ずある $p=p(x)\in[0,1]$ が存在して、$\bar{x}$ と $\underline{x}$ についてのくじ $L[p(x)]$ と x を無差別にできる。よって、

$$u(x)=u(L[p(x)])=p(x)$$

と定める。

最後に、任意のくじ $L\in\Psi$ について

$$u(L)=\sum_{x\in X}L(x)u(x)=\sum_{x\in X}L(x)p(x)$$

と定めれば期待効用が完成する。

独立性より、これは $\succsim$ の正しい効用関数表現になっていることがわかる。

正線形変換からの独立性（**cf.** 正単調変換）

任意の $\alpha > 0$、$\beta \in R$ について、期待効用関数 u を

$$v = \alpha u + \beta$$

に置き換えても、おなじ選好順序を表す期待効用関数になっている。

期待効用関数は、正単調変換からは独立でない。が、
期待効用による表現にはならないけれども、正単調変換によって
同じ選好順序を意味する効用関数には変換される

10.4. リスク態度

選択肢集合を連続空間とする：$X=[\underline{x},\bar{x}]$

Monetary Lottery（多くの経済問題はこのようにお金にからむ）

累積分布関数　　$L=F:[\underline{x},\bar{x}]\to[0,1]$　（$F(\bar{x})=1$，非減少関数）

$$u(L)=\int_{x\in[\underline{x},\bar{x}]} u(x)dF(x)$$

あるいは

$$u(L)=\int_{x\in[\underline{x},\bar{x}]} u(x)f(x)dx$$ （確率密度 $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=F'(x)$）

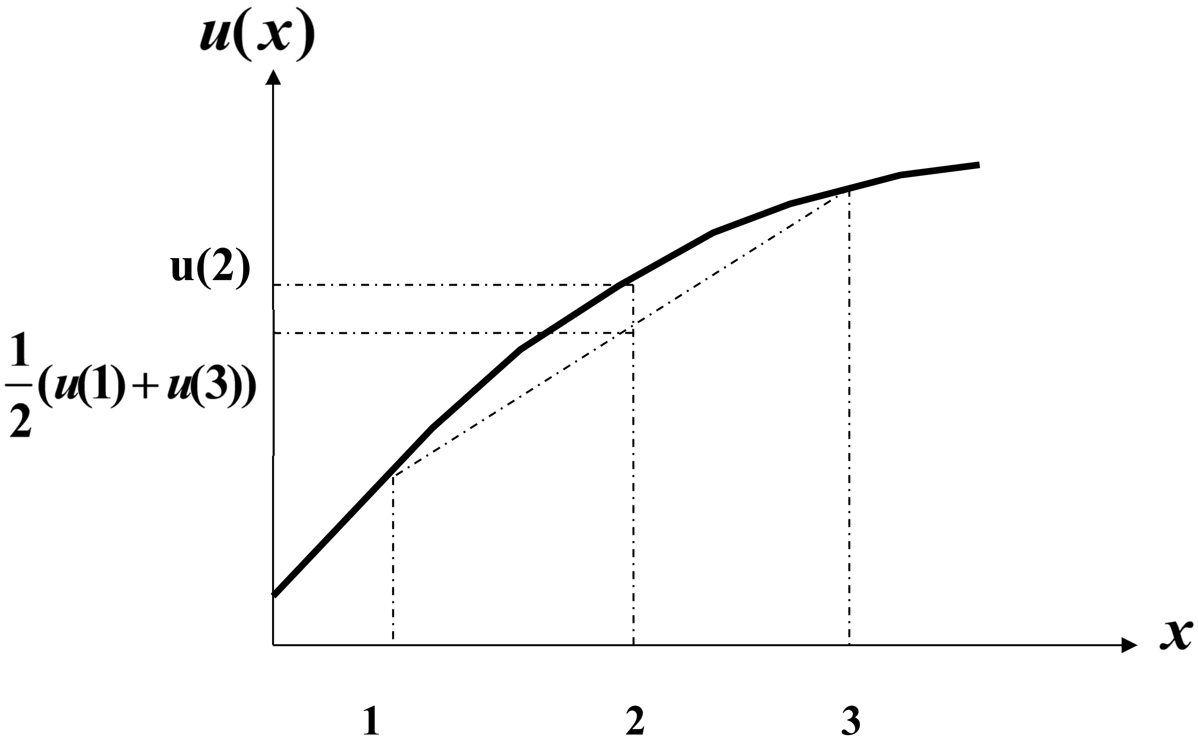
＊注意するべきポイント

「期待効用」と「金銭の期待値」を混同しないように！

リスク態度（Monetary Lottery）

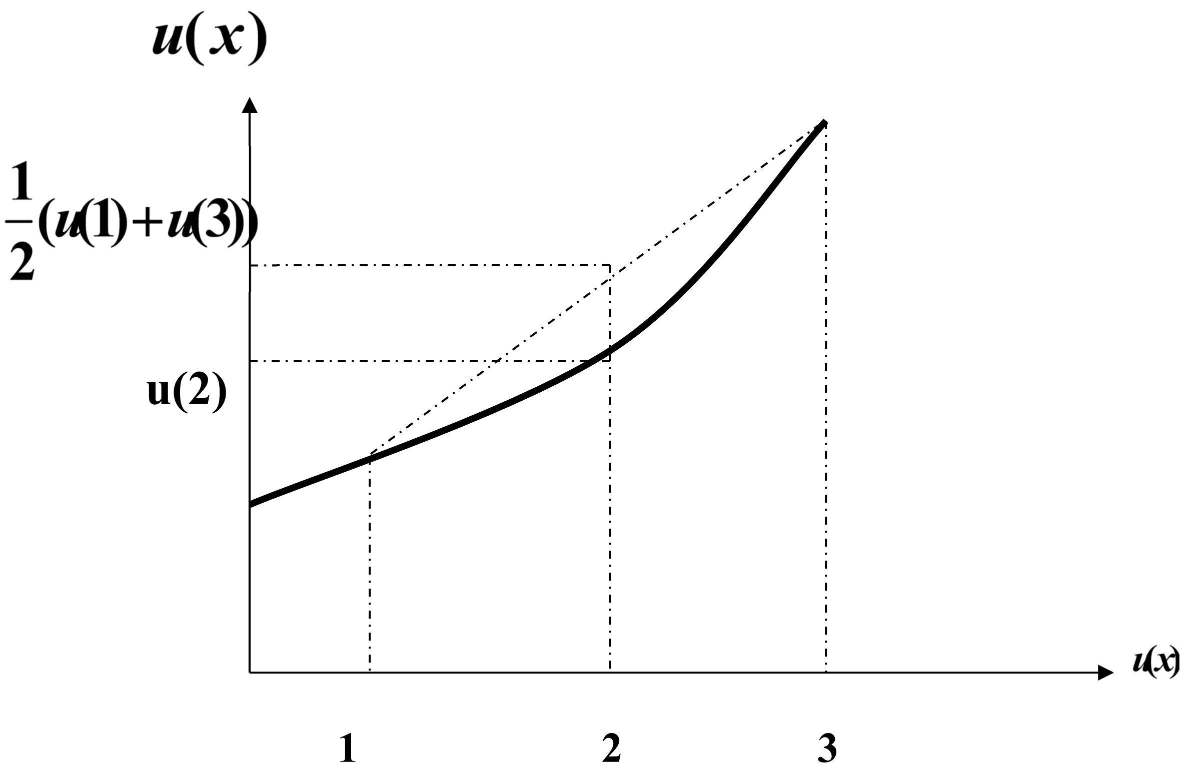
「リスク回避的」な期待効用関数
「リスク愛好的」な期待効用関数
「リスク中立的」な期待効用関数

リスク回避的：凹（concave）関数



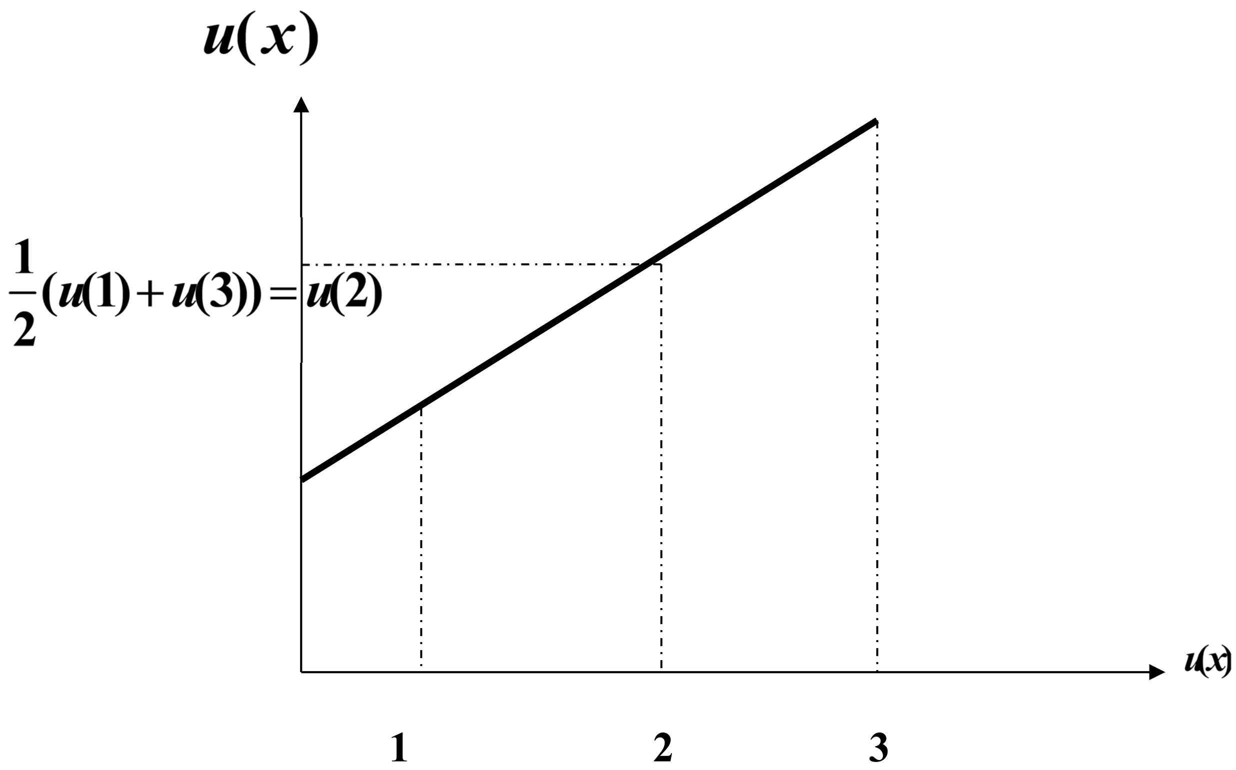
くじに対する期待効用は
くじの期待値（2 円）を確実にもらえる場合の効用よりも低い

リスク愛好的：凸（convex）関数



くじに対する期待効用は
くじの期待値（2 円）を確実にもらえる場合の効用よりも高い

リスク中立的：線形（linear）関数



くじに対する期待効用は
くじの期待値（2 円）を確実にもらえる場合の効用と同じ

リスク態度を理解するための例題：

以下のくじが **55** 万円で売られています。
あなたは（とても）リスク回避的です。このくじを買いますか？

景気の悪いケース（確率 **50%**）に **100** 万円
景気のいいケース（確率 **50%**）に **0** 円

答え：あなたのビジネスが

景気の悪いケース（確率 **50%**）に **0** 円
景気のいいケース（確率 **50%**）に **100** 万円

ならば、このくじを買った方がいいかも。（**Think why**）

第 **10** 章終わり

宿題（10）を提出すること