2023 年 10 月 3 日

第 1 部：不完備情報の静学ゲーム

第１章：不完備情報の静学ゲーム

Tadelis Chapter 12
松島第 4 回

静学ゲーム **vs** 動学ゲーム
完備情報 **vs** 不完備情報

「ゲーム理論」おさらい

完備情報（Complete Information）

仮定：プレーヤーは「ゲームのルール」を知っている（Common Knowledge）

標準形ゲーム（Normal form game，三種の神器）

$$G \equiv (N, M, u) = (N, (M_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

プレーヤー集合 N　行動（戦略）集合 M_i　利得関数 u_i

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$	**Set of Players**	$i \in N$
M_i	**Set of Actions for Player** i	$m_i \in M_i$
$M = \underset{i \in N}{\times} M_i$	**Set of Action Profiles**	$m = (m_i)_{i \in N} \in M$
$u_i : M \to R$	**Payoff Function for Player** i	$u_i(m) \in R$
$u = (u_i)_{i \in N}$	**Profile of Payoff Functions**	

本講義のメインテーマ

不完備情報（**Incomplete Information**）

プレーヤーは「社会の状態（**State of the World**）」がどれかわからない

∴　プレーヤーは「ゲームのルール」がどれかわからない

1.1. 不完備情報の静学ゲーム：定義

State Space Ω

$\Downarrow$

State $\omega \in \Omega$ **occurs**

$\Downarrow$

状態ωにおける標準形ゲーム

$$G = G(\omega) \equiv (N, M, (u_i(\cdot, \omega))_{i \in N})$$

$u_i(m, \omega)$

player i**'s payoff at state** $\omega \in \Omega$

which is induced by action profile $m \in M$

各プレーヤーはどのゲーム（$\boldsymbol{G(\omega)}$）がプレイされるのかわからない

ゲームの束 $(\boldsymbol{G(\omega)})_{\omega\in\Omega}$

どの **state** $\boldsymbol{\omega}$ が現実におきているのかよく知らない

（ただし本講義は
各プレーヤーがプレーヤー集合 $\boldsymbol{N}$、行動集合 $\boldsymbol{M_i}$ を知っていると仮定）

情報の非対称性（Asymmetric Information）

プレーヤー i は真の社会状態 ω について
私的情報 ω_i（プレーヤー i の「タイプ」と呼ぶ）を
ω についての部分的な情報として
知っているとする

Player i's Type (Private Information)

$$\omega_i \in \Omega_i$$

$$\Omega \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$

$$\omega = (\omega_i)_{i \in N} \in \Omega$$

Private Values（私的価値）

$u_i(m,\omega)$ は ω_i にのみ依存する。

$$u_i(m,\omega) = u_i(m,\omega_i)$$

私は、自分の利得関数のことはわかっている。
しかし他人の利得関数については知らない。
例:「売りに出された財の品質についてはわかっている。
しかしほしいかどうかは人それぞれだ」
選好についての情報非対称性：ミクロ経済学を思い出せ

Interdependent Values

$u_i(m,\omega)$は ω_{-i} にも依存する。

私は、自分の利得関数についても、他人の利得関数についても、部分的にしかわかっていない。
例：「売りに出された財の品質について部分的にしか知らない。が、みんなの情報をまとめれば（かなり）正しい品質情報になる。」
油田採掘権
品質についての情報の非対称性：アカロフの「レモン」

不完備情報の静学ゲーム Γ：定義

ゲームの束 ＋ 私的情報

$$\Gamma \equiv (N,\ M,\ (\Omega_i)_{i\in N}, \Omega, ((u_i(\cdot,\omega))_{\omega\in\Omega})_{i\in N})$$

Set of Players	N
Action Set	M_i
Type Space	$\Omega_i,\ \omega_i \in \Omega_i$
State Space	$\Omega \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$
Payoff Function	$(u_i(\cdot,\omega))_{\omega\in\Omega}$

Player i's Strategy $s_i \in S_i$ in Γ

$$s_i : \Omega_i \to M_i$$

戦略とは？
行動選択のプランのこと！

「私のタイプが ω_i 」ならば 「$s_i(\omega_i) \in M_i$ を選択する」

行動選択の仕方は自身のタイプ ω_i にのみ依存しうる
（ω_{-i} のことはわからないから）

Strategy Profile

$$s = (s_i)_{i \in N} \in S = \underset{i \in N}{\times} S_i$$

1.2. 不完備情報の静学ゲームにおける均衡概念

不完備情報においてプレーヤーはどのように行動するのか

３つの代表的な均衡概念

優位戦略（Dominant Strategy）

事後均衡（情報非対称性下のナッシュ均衡）

ベイジアン・ナッシュ均衡（次章にて解説）

1.2.1. Dominant Strategy

「ゲーム理論」のおさらい

完備情報ゲームにおける Dominant Strategy

A strategy $m_i \in M_i$ is said to be dominant for player i in $G=(N,M,u)$ if

for every $m_i' \in M_i \setminus \{m_i\}$,

$$u_i(m_i, m_{-i}) \geq u_i(m_i', m_{-i}) \text{ for all } m_{-i} \in M_{-i},$$

where the strict inequality holds for some $m_{-i} \in M_{-i}$.

不完備情報ゲームにおける Dominant Strategy

A strategy $s_i \in S_i$ is said to be dominant for player $i \in N$ in Γ if

for every $\omega \in \Omega$ and $m_i' \in M_i \setminus \{s_i(\omega_i)\}$,

$$u_i((s_i(\omega_i), m_{-i}), \omega) \geq u_i((m_i', m_{-i}), \omega) \text{ for all } m_{-i} \in M_{-i},$$

where the strict inequality holds for some $m_{-i} \in M_{-i}$.

タイプ ω_i のプレーヤー i にとって、行動 $s_i(\omega_i) \in M_i$ を選択することは
相手のタイプ $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$ 、相手の行動選択 $m_{-i} \in M_{-i}$ に関係なく最適である。

優位戦略は
インセンティブについてもっとも強い要求を課している
合理的均衡概念である

そのため
優位戦略が存在するゲームは一般的には稀である
が、存在する重要なケースもある！

優位戦略が存在するケースの代表例
二位価格入札（**Second Price Auction**）

財を欲しがっている人が複数いる
財を一番欲しがっている人に配分したい：効率的配分

私的価値（**Private Values,** 選好について情報非対称性）を仮定

誰が一番欲しがっているかわからない

入札制度とは：

各入札者から財に対する選好情報を聞き出して
それを効率的配分（一番欲しがっている人）の割り出しに結びつける
制度的しくみのこと

二位価格入札は
入札制度のさまざまなしくみの中でも
特に優れたパフォーマンスが期待できる
合理的なルールのひとつと考えられている

二位価格入札のルール

財（一単位、非分割）に対して、各入札者（各プレーヤー）は同時に封印入札する
最高指値をした入札者に財が落札される
落札者は二番目に高い指値（二位価格）を払う：自分の指値を払うのではないので注意！

$M_i = [0,\infty)$ — **Bidder i makes a bid $m_i \in M_i$**

$\omega_i \in \Omega_i = [0,1]$ — タイプ ω_i の財評価額は ω_i（万円）である

$u_i(m,\omega) = 0$ — **if bidder i is a loser, i.e., either**

$m_j > m_i$ for some $j \neq i$, or

$m_j = m_i$ for some $j < i$.

$u_i(m,\omega) = \omega_i - \max_{j \neq i} m_j$ — **if bidder i is the winner, i.e.,**

$m_i \geq m_j$ for all $j \neq i$, and

$m_i > m_j$ for all $j < i$.

正直戦略（Honest Strategy） $s_i^* \in \boldsymbol{S}_i$

自身の評価額を正直に指値表明する戦略のこと：

$$s_i^*(\omega_i) = \omega_i \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega$$

二位価格入札では
入札者は正直に指値表明をする強いインセンティブをもつ。
つまり
正直戦略は優位戦略になっている！

一番欲しがっている人が一番高い指値をすることになる
∴　効率的配分が達成！

Theorem 1-1 : In the second price auction, the honest strategy s_i^* is a dominant strategy for each player $i \in N$.

Proof (outline): Fix an arbitrary $\omega \in \Omega$ and an arbitrary $m \in M$. Note

$$u_i(m,\omega) \le \max[0, \omega_i - \max_{j \in N\setminus\{i\}} m_j].$$

Suppose that bidder i makes the honest bid $s_i^*(\omega_i) = \omega_i$ instead of m_i.

Case 1: i is the winner. Since $\omega_i \ge \max_{j \in N\setminus\{i\}} m_j$, we have

$$u_i((\omega_i, m_{-i}),\omega) = \omega_i - \max_{j \in N\setminus\{i\}} m_j \ge 0$$

Case 2: i is a loser. Since $\omega_i \le \max_{j \in N\setminus\{i\}} m_j$, we have

$$u_i((\omega_i, m_{-i}),\omega) = 0 \ge \omega_i - \max_{j \in N\setminus\{i\}} m_j.$$

Hence, we can conclude:

$$u_i((\omega_i, m_{-i}),\omega) = \max[0, \omega_i - \max_{j \in N\setminus\{i\}} m_j] \ge u_i(m,\omega).$$

Q.E.D.

1.2.2. Ex Post Equilibrium（事後均衡）

社会状態 $\omega \in \Omega$ ごとに
完備情報下の静学ゲーム $G(\omega) = (N, M, u(\cdot, \omega))$ のナッシュ均衡を考えよう。
大事な点は、不完備情報であるため
各プレーヤーのナッシュ均衡プレイは自身のタイプのみに依存でないといけない

A strategy profile $s \in S$ is said to be an ex post Equilibrium（事後均衡）if

for every $\omega = (\omega_i, \omega_{-i}) \in \Omega$,
$s(\omega) = (s_j(\omega_j))_{j \in N} \in M$ is a Nash equilibrium in $G(\omega)$,
that is,
for every $i \in N$ and $m_i \in M_i$,

$$u_i(s(\omega), \omega) \geq u_i((m_i, (s_j(\omega_j))_{j \in N \setminus \{i\}}), \omega)$$

[Ex post equilibrium]

$\Updownarrow$

[Nash equilibrium, and
each player's strategy depends only on his type]

[Dominant strategy profile]

$\Downarrow$

[Ex post equilibrium]

第 **1** 章終わり

宿題（１）を提出すること。

ITC-LMS にてダウンロードおよび提出（１週間以内）。