

2023年10月10日

第2章：ベイジアンゲーム (Bayesian Game) (続き)

2.4. 応用例：一位価格入札 (First Price Auction)

財（一単位、非分割）に対して各入札者（各プレーヤー）は同時に封印入札
 最高指値をした入札者に財が落札される
 落札者は自身の指値（一位価格）を払う（cf. 二位価格入札）
 古くからとてもポピュラーな入札方式（二位価格入札はあまりポピュラーでなかった）

$$M_i = [0,1]$$

$$\Omega_i = [0,1]$$

$$u_i(m, \omega) = 0$$

$$u_i(m, \omega) = \omega_i - m_i$$

Bidder i makes a bid $m_i \in [0,1]$.

タイプ ω_i の財評価額は ω_i (万円) である

if bidder i is a loser, i.e., either

$$m_j > m_i \text{ for some } j \neq i, \text{ or}$$

$$m_j = m_i \text{ for some } j < i.$$

if bidder i is the winner, i.e.,

$$m_i \geq m_j \text{ for all } j \neq i, \text{ and}$$

$$m_i > m_j \text{ for all } j < i.$$

二位価格入札と比較してみよう

- 二位価格入札： 正直な指値が優位戦略になる
効率的配分を達成
落札者は二位価格を支払う： 差額分落札者に利得発生
- 一位価格入札： 正直に指値すると利得ゼロ
低めに指値しよう！
指値低くすると、低価格で落札できるが落札確率はさがる
最適な指値はなに？

Belief System を導入して
ベイジアンゲームとして一位価格入札を考察してみよう
ベイジアン・ナッシュ均衡 (**BNE**) をもとめてみよう

効率的配分は達成できるか
期待支払額は二位価格入札と比べてどうか

単純化のため $n=2$ としよう

モデルの仮定 : **Common Prior + Independent Types**

Symmetric Distribution :

二人のタイプは独立でしかも**分布が同じ**とする : $P^1 = P^2$

BNE の戦略プロファイル $s = (s_1, s_2)$ の候補として

単調増加 : 指値 $s_i(\omega_i)$ は ω_i の増加関数

Symmetry : $s_1(\omega_1) = s_2(\omega_2)$ if $\omega_1 = \omega_2$

をみたすものを探してみよう !

単調増加と **Symmetry** がみたされていれば一番欲しがっている人に財が配分される

∴ 効率的配分が **BNE** によって達成されることになる

対称性と単調増加をみたすベイジアン・ナッシュ均衡の導出方法

その1：正攻法（とりあえず推奨）： ひたすら計算して導く

その2：仮説的思考： 二位価格入札の考察から類推して解く

ここでは後者の方法で導出してみよう

二位価格入札再検討

二位価格入札にて、ふたりともに正直に指値すると仮定しよう

・まず、入札者1に注目しよう

タイプ ω_1 の入札者1が落札する確率は $P^2(\omega_1)$ である (要確認)

タイプ ω_1 は落札時には相手の評価額 ω_2 ($\leq \omega_1$) を支払う

よって、期待支払額は $\int_{b=0}^{\omega_1} bp^2(b)db$ になる (要確認)

期待支払額は ω_1 の増加 (非減少) 関数になっている (要確認)

落札者になる条件付きの期待支払額は $z_1(\omega_1) \equiv \frac{\int_{b=0}^{\omega_1} bp^2(b)db}{P^2(\omega_1)}$ になる (要確認)

落札者になる条件付きの期待支払額は ω_1 の増加 (非減少) 関数になっている (要確認)

・次に、入札者2に注目しよう（入札者1と同じ説明）

タイプ ω_2 の入札者2が落札する確率は $P^1(\omega_2)$ である

タイプ ω_2 は落札時には相手の評価額 ω_1 ($\leq \omega_2$) を支払う

よって、期待支払額は $\int_{b=0}^{\omega_2} bp^1(b)db$ になる

期待支払額は ω_2 の増加（非減少）関数になっている

落札者になる条件付きの期待支払額は $r_2(\omega_2) \equiv \frac{\int_{b=0}^{\omega_2} bp^1(b)db}{P^1(\omega_2)}$ になる

落札者になる条件付きの期待支払額は ω_2 の増加（非減少）関数になっている

分布対称性の仮定 ($P^1 = P^2$) より

$$\frac{\int_{b=0}^{\omega_2} bp^1(b)db}{P^1(\omega_2)} = \frac{\int_{b=0}^{\omega_1} bp^2(b)db}{P^2(\omega_1)}, \text{ i.e., } z_2(\omega_2) = z_1(\omega_1), \text{ if } \omega_1 = \omega_2$$

が成立していることになる (要確認)

二位価格入札において正直指値は優位戦略だから
ベイジアン・ナッシュ均衡にもなっている

二位価格入札において、（相手は正直として）、タイプ ω_1 の入札者 1 がうその指値
「 $m_1 \neq \omega_1$ 」をすると

落札確率

$$P^2(m_1)$$

落札者になる条件付きの期待支払額

$$z_1(m_1) \equiv \frac{\int_{b=0}^{m_1} bp^2(b)db}{P^2(m_1)}$$

つまり、期待利得は

$$P^2(m_1)\{\omega_1 - z_1(m_1)\}$$

になる。BNE より、この値は正直指値の時に最大になる。つまり

$$P^2(\omega_1)\{\omega_1 - z_1(\omega_1)\} \geq P^2(m_1)\{\omega_1 - z_1(m_1)\} \quad \text{for all } m_1 \in \Omega_1$$

が成立している。

以上は入札者 2 についても同様に成立している。

以上のお膳立ての下で「一位価格入札」を考察してみよう！

入札者 1 は戦略 s_1^*

$$s_1^*(\omega_1) = z_1(\omega_1) \equiv \frac{\int_{b=0}^{\omega_1} bp^2(b)db}{P^2(\omega_1)}$$

つまり、落札者になる条件付きの期待支払額を指値していると考えられる。

入札者 2 は戦略 s_2^*

$$s_2^*(\omega_2) = z_2(\omega_2) \equiv \frac{\int_{b=0}^{\omega_2} bp^1(b)db}{P^1(\omega_2)}$$

つまり、落札者になる条件付きの期待支払額を指値すると考えることができる。

一位価格入札において

戦略プロファイル $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ は効率的配分を達成する

分布対称性 ($P^1 = P^2$) より

$$\frac{\int_{b=0}^{\omega_2} bp^1(b)db}{P^1(\omega_2)} = \frac{\int_{b=0}^{\omega_1} bp^2(b)db}{P^2(\omega_1)}, \text{ i.e., } s_2^*(\omega_2) = s_1^*(\omega_1), \text{ if } \omega_1 = \omega_2$$

また、 s_i^* は単調増加関数である

よって、 s^* は効率的配分を達成する！ (要確認)

一位価格入札において 戦略プロファイル $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ は BNE になる

入札者 1 に着目（入札者 2 についても同様）：

タイプ ω_1 が、 $s_1^*(\omega_1) \in [0, 1]$ でなく、別の指値 b_1 をするとしよう。
 この場合、 $b_1 = s_1^*(m_1)$ をみたす $m_1 \neq \omega_1$ が存在する。（要確認）
 つまり、タイプ ω_1 がタイプ $m_1 \neq \omega_1$ のふりをすることになる。

落札確率 $P^2(m_1)$ （対称性の仮定から成立！！）

$$\text{落札者になる条件付きの期待支払額 } z_1(m_1) \equiv \frac{\int_{b=0}^{m_1} b p^2(b) db}{P^2(m_1)}$$

しかしこれが損になることは、二位価格入札における正直指値が BNE であることから、すでに証明済みである。（証明終わり）

分布対称性の下では
一位価格入札は、効率的配分を達成し
二位価格入札での正直指値と同じ期待支払い額、同じ期待売り手収入
をもたらす

*** 分布対称性の仮定がなければ？ :**

二位価格入札 : 効率的配分達成 **OK**
一位価格入札では？ : だめ (後述)

まとめ

一位価格入札と二位価格入札はことなる入札ルールである
しかし、対称性の仮定下では同じ配分を達成している
この時、両ルールは、全く同じ期待支払額、期待収入をもたらす

「一見ことなるルールが同じパフォーマンスをもたらす」
この性質の論理的根拠を明らかにできれば
見た目にとらわれずにルールの良し悪しを判断できるようになる

⇒ 「収入同値定理」 (第2部にて)

第2章終わり

宿題（2）を提出すること

補足：二位価格入札再検討（ページ6）

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega_1} z_1(\omega_1) &= \frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{\int_{b=0}^{\omega_1} bp^2(b)db}{P^2(\omega_1)} \right) \\
&= \frac{\omega_1 p^2(\omega_1)}{P^2(\omega_1)} - z_1(\omega_1) \frac{p^2(\omega_1)}{P^2(\omega_1)} \\
&= \frac{p^2(\omega_1)}{P^2(\omega_1)} \{\omega_1 - z_1(\omega_1)\} \\
&> 0
\end{aligned}$$

タイプが上がると、落札確率が上がるが、その際には高めの価格を支払うことになるので、期待支払額は上がることになる。