

2023年10月13日

## 第3章：メカニズムデザイン（続き）

## 3.4.1. 表明原理（優位戦略バージョン）

任意の（間接）メカニズム **Indirect Mechanism**  $(M, \hat{g}, \hat{x})$  を考えよう。優位戦略プロフィール  $\hat{s}$  が存在するとしよう。

直接メカニズム  $(g, x)$  を

$$g(\omega) = \hat{g}(\hat{s}(\omega)) \quad \text{for all } \omega \in \prod_{i \in N} \Omega_i$$

$$x_i(\omega) = \hat{x}_i(\hat{s}(\omega)) \quad \text{for all } \omega \in \prod_{i \in N} \Omega_i \text{ and } i \in N$$

と特定化しよう。すると

直接メカニズム  $(g, x)$  と正直戦略プロフィール  $s^*$  ( $s_i^*(\omega_i) = \omega_i$ ) は  
 間接メカニズム  $(M, \hat{g}, \hat{x})$  と優位戦略プロフィール  $\hat{s}$  がもたらす配分および  
 支払いとまったく同じ配分と支払いをもたらす。しかも  
 直接メカニズム  $(g, x)$  において正直戦略プロフィール  $s^*$  は  
 優位戦略プロフィールになっている！（要確認）

正直戦略プロファイルが優位戦略プロファイルになっている場合  
その直接メカニズムは  
優位戦略誘因整合性

**(Incentive Compatibility in Dominant Strategy, DIC)**

をみたしている、と呼ぶ事にしよう

**Definition 3-1:** A direct mechanism  $(g, x)$  is said to be **incentive compatible in dominant strategy (DIC)** if for every  $i \in N$ , the honest strategy  $s_i^*$  is a dominant strategy, i.e., for every  $\omega \in \Omega$ ,

$$v_i(g(\omega_i, \omega'_{-i}), \omega) - x_i(\omega_i, \omega'_{-i}) \geq v_i(g(\omega'), \omega) - x_i(\omega') \text{ for all } \omega' \in \Omega,$$

and the strict inequality holds for some  $\omega' \in \Omega$ .

## 表明原理 (Revelation Principle) とは

「正直が優位戦略になっている直接メカニズムだけを考えれば事足りる」ということを意味する定理：

**定理 3-1 (Revelation Principle in dominant strategy) :**

For every indirect mechanism  $(M, \hat{g}, \hat{x})$  and dominant strategy profile  $\hat{s}$  in  $(M, \hat{g}, \hat{x})$ , the associated direct mechanism  $(g, x)$ , which is specified as

$$g(\omega) = \hat{g}(\hat{s}(\omega)) \text{ and } x(\omega) = \hat{x}(\hat{s}(\omega)) \text{ for all } \omega \in \prod_{i \in N} \Omega_i,$$

satisfies incentive compatibility in dominant strategy (DIC).

**証明:**  $\hat{s}$  は間接メカニズム  $(M, \hat{g}, \hat{x})$  における優位戦略プロファイルだから以下のことが成り立つ： For every  $\omega \in \Omega$ ,  $i \in N$ , and  $\omega' \in \Omega$ ,

$$v_i(\hat{g}(\hat{s}(\omega_i, \omega'_{-i}), \omega) - \hat{x}_i(\hat{s}(\omega_i, \omega'_{-i}))) \geq v_i(\hat{g}(\hat{s}(\omega'), \omega) - \hat{x}_i(\hat{s}(\omega'))),$$

which, along with the specification of direct mechanism  $(g, x)$ , implies

$$v_i(g(\omega_i, \omega'_{-i}), \omega) - x_i(\omega_i, \omega'_{-i}) \geq v_i(g(\omega'), \omega) - x_i(\omega').$$

**Q.E.D.**

### 3.4.2. 表明原理 (BNE version)

**Definition: Bayesian Incentive Compatibility  
(Incentive Compatibility in Bayesian Nash Equilibrium, BIC)**

**Direct Mechanism  $(g, x)$  is said to be Bayesian incentive compatible (BIC)  
if the honest strategy profile  $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$  is a BNE:**

**for every  $i \in N$ ,  $\omega_i \in \Omega_i$ , and  $\omega'_i \in \Omega_i$ ,**

$$E[U_i(g(\omega), x_i(\omega), \omega) | \omega_i] \geq E[U_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), x_i(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega) | \omega_i]$$

## Revelation Principle in BNE

定理 3-2 (Revelation Principle in BNE):

For every indirect mechanism  $(M, \hat{g}, \hat{x})$  and BNE  $\hat{s}$ , the direct mechanism  $(g, x)$  specified as

$$g(\omega) = \hat{g}(\hat{s}(\omega)) \text{ and } x(\omega) = \hat{x}(\hat{s}(\omega)) \text{ for all } \omega \in \Omega$$

satisfies Bayesian incentive compatibility (BIC).

任意の間接メカニズムと BNE に対して  
 それと同じ配分と支払いをもたらす BIC direct mechanism が存在する  
 $\therefore$  BIC direct mechanism だけを考えればいい!

ただし

設計された **Direct Mechanism** には **honest strategy profile** 以外に  
 別の (嘘つきをする) **BNE** が存在するかもしれない  
 この **BNE** はことなる配分を達成するかもしれない:

**Unique (full) Implementation Problem**

### 3.4.3. 表明原理 (Ex Post Equilibrium)

#### Definition: Incentive Compatibility in Ex Post Equilibrium (EPIC)

**Direct Mechanism  $(g, x)$  is said to be incentive compatible in ex post equilibrium if honest strategy profile  $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$  is an ex post equilibrium:**

**for every  $i \in N$ ,  $\omega_i \in \Omega_i$ , and  $\omega \in \Omega$ ,**

$$U_i(g(\omega), x_i(\omega), \omega) \geq U_i(g(\omega'_i, \omega_{-i}), x_i(\omega'_i, \omega_{-i}), \omega)$$

## Revelation Principle in Ex Post Equilibrium

**定理 3-3 (Revelation Principle in Ex Post Equilibrium):**

For every indirect mechanism  $(M, \hat{g}, \hat{x})$  and ex post equilibrium  $\hat{s}$ , the direct mechanism  $(g, x)$  specified as

$$g(\omega) = \hat{g}(\hat{s}(\omega)) \text{ and } x(\omega) = \hat{x}(\hat{s}(\omega)) \text{ for all } \omega \in \Omega$$

satisfies incentive compatibility in ex post equilibrium (EPIC).

任意の間接メカニズムと ex post equilibrium に対して  
それと同じ配分と支払いをもたらす ex post incentive compatible direct mechanism  
が存在する

∴ ex post incentive compatible direct mechanism だけを考えればいい！

ただし、設計された **Direct Mechanism** には **honest strategy profile** 以外に  
別の **ex post equilibrium** が存在するかもしれない  
ことなる配分を達成するかもしれない：  
**Unique (full) Implementation Problem**

\* **Direct Mechanism, Indirect Mechanism, Revelation Principle** のイメージ

**Indirect Mechanism**  $(M, \hat{g}, \hat{x})$

- 各プレイヤー  $i$  は自身の PC に「自身のタイプ  $\omega_i$  を行動選択  $s_i(\omega_i) \in M_i$  に変換するソフト」をインストール
- **Central Planner** は自身の PC に「全プレイヤーから送信された行動プロフィール  $m = (m_i) \in M$  を配分  $\hat{g}(m) \in A$  と支払い  $\hat{x}(m) \in R^n$  に変換するソフト」をインストール

**Direct Mechanism**  $(g, x)$

- 各プレイヤーの PC にインストールされているソフトも **Central Planner** の PC に全部まとめてしまうと **Direct Mechanism**  $(g, x)$  が出来上がる

$$g = \hat{g} \circ s, \quad x = \hat{x} \circ s$$

ソフトがインストールされている場所が違うだけだから両メカニズムにおけるインセンティブの在り方も同じはず (**Revelation Principle**)

## \* Partial Implementation と Revelation Principle : 追記

**Direct Mechanism** が **incentive compatible** であるとは：正直表明が均衡であること  
しかし、虚偽表明もまた「別の均衡」になっている可能性がある  
しかも虚偽表明は別の配分をもたらす恐れあり

### **Unique Implementation Problem:**

均衡が一意に存在するようにメカニズムデザインを工夫せよ  
もはや表明原理は成り立たない

間接メカニズムを丁寧にデザインして嘘つき均衡の可能性を排除せよ  
**Abreu-Matsushima Mechanism (Econometrica 1992)**

第3章終わり

宿題（3）を提出すること