2023 年 10 月 24, 27 日

第 6 章：オークション基礎（１）（続き）

6. 2. 期待収入最大化

経セミ第 8 回（2013 年 12 月、2014 年 1 月号）

売り手の目的：　効率的配分をゆがめてでも収入を高めたい
Remember 同値定理

売り手独占の強みを利用：　「売り渋って価格を吊り上げよう」

⇒ 最低入札価額（Reserve Price、リザーブ価格）設定：
「この価格以下では落札させない」

標準的ミクロ経済学を思い出せ：　独占価格の設定

6. 2. 1. 例（分布非対称）による説明

入札者２人、非分割財１単位

入札者２のタイプは　$\omega_2 = 1/2$

入札者１のタイプは　$\omega_1 \in [0,1]$　連続空間（**5.1.1** の最後の例）

効率的配分は

$$g(\omega_1) = 1 \quad \text{if } \omega_1 > 1/2$$

$$g(\omega_1) = 2 \quad \text{if } \omega_1 < 1/2$$

Efficiency と **BIC** と参加制約みたす支払いルールのベストは

$$\begin{array}{lll} x_1(\omega_1) = 1/2 \ \text{and}\ x_2(\omega_1) = 0 & & \text{if}\ \ \omega_1 > 1/2 \\ x_1(\omega_1) = 0 \ \ \text{and}\ x_2(\omega_1) = 1/2 & & \text{if}\ \ \omega_1 < 1/2 \end{array}$$

売り手収入は $1/2$:　　入札者１に情報レントとられてしまう。

これでは入札者１はいなくてもいい

収入同値定理：　　収入をもっと高めたいなら効率的配分あきらめよ**!**

Reserve Price 設定

入札者１に対して

Reserve Price $y \in [1/2, 1]$ を以下のように設定しよう！

入札者１に対しては「$\omega_1 \geq y$ でないと売らない」

そのかわり入札者 **2** には $1/2$ で売る：

$$g(\omega_1) = 1 \qquad \text{if } \omega_1 \geq y$$
$$g(\omega_1) = 2 \qquad \text{if } \omega_1 < y$$
$$x_1(\omega_1) = y \text{ and } x_2(\omega_1) = 0 \qquad \text{if } \omega_1 \geq y$$
$$x_1(\omega_1) = 0 \text{ and } x_2(\omega_1) = 1/2 \qquad \text{if } \omega_1 < y$$

この時 **BIC** 成立している

（入札者１が正直に振舞うインセンティブについて要確認）

期待収入は　　$y\{1-P^1(y)\}+\frac{1}{2}P^1(y)$

yについて期待収入を最大化：一階条件は

$$1-P^1(y)-yp^1(y)+\frac{1}{2}p^1(y)=0$$

$\therefore$　$y=\frac{1}{2}+\dfrac{1-P^1(y)}{p^1(y)}$（円）に **Reserve Price** を定めよ！

$$g(\omega_1)=1 \quad \text{if} \ \ \omega_1-\frac{1-P^1(y)}{p^1(y)}\geq \frac{1}{2}$$

$$g(\omega_1)=2 \quad \text{if} \ \ \omega_1-\frac{1-P^1(y)}{p^1(y)}< \frac{1}{2}$$

（$\omega_1>\frac{1}{2}$ でも入札者２に売る：**Why?**）

Virtual Valuation (事実上の評価、Marginal Revenue)

入札者２に売れば確実に収入 $\frac{1}{2}$ を獲得：

入札者２に対する事実上の評価 $\frac{1}{2}$

しかし

タイプ ω_1 の入札者１に売っても

事実上は ω_1 を獲得できていない：

∵ 情報レントが発生しているから

タイプが区間 $[\omega_1+\Delta,1]$ 内の入札者１が財獲得
Reserve Price を $\omega_1+\Delta$ としよう

Δ 円リザーブ価格を下げると
区間 $[\omega_1,1]$ 内の入札者１が獲得（購入確率 $p^1(\omega_1)\Delta$ アップ）
よって $\omega_1 p^1(\omega_1)\Delta$ 円収入アップ
しかし、一方で、一律 Δ 円 割安になるため
$\{1-P^1(\omega_1)\}\Delta$ 円の損失発生（情報レントの発生）

$\therefore$ 売り手の収入増は $\omega_1 p^1(\omega_1)\Delta$ ではなく

$$\{\omega_1-\frac{1-P^1(\omega_1)}{p^1(\omega_1)}\}p^1(\omega_1)\Delta$$

タイプ ω_1 の入札者１に対する

「Virtual Valuation（事実上の評価、Marginal Revenue）」

$$MR_1(\omega_1) = \omega_1 - \frac{1 - P^1(\omega_1)}{p^1(\omega_1)}$$

収入最大化の鉄則：

Virtual Valuation の高い入札者に売れ！

数値例：一様分布（$P^1(\omega_1)=\omega_1$）

Virtual Valuation for bidder 1：

$$\omega_1-\frac{1-P^1(\omega_1)}{p^1(\omega_1)}=\omega_1-\frac{1-\omega_1}{1}=2\omega_1-1$$

$2y-1=1/2$（最大化条件）より

$y=3/4$ を **Reserve Price** に設定せよ！

6. 2. 2. Virtual Valuation についての考察

$$MR_i(a,\omega) \equiv v_i(a,\omega) - v_{i2}(a,\omega)\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$$

解釈： 一律価格 $h = v_i(a,\omega)$ に対する需要を $1-P^i(\omega_i)$ と考えよう
需要を限界的に増やして「限界収入 $MR_i(a,\omega)$」を計算しよう！

$$MR_i(a,\omega) = \frac{d[v_i(a,\omega)\{1-P^i(\omega_i)\}]}{d\omega_i} \cdot \frac{d\omega_i}{d\{1-P^i(\omega_i)\}}$$

$$= v_i(a,\omega) - v_{i2}(a,\omega)\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$$

この限界収入のことを「事実上の評価（Virtual Valuation）」と呼ぶ

Virtual Valuation

$$MR_i(a,\omega) \equiv v_i(a,\omega) - v_{i2}(a,\omega)\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$$

評価 $v_i(a,\omega)$ － 情報レント $v_{i2}(a,\omega)\dfrac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$

情報レントとは？

需要を一単位上げるためには価格を一律$\dfrac{v_{i2}(a,\omega)}{p^i(\omega_i)}$円下げないといけない

$\therefore \dfrac{v_{i2}(a,\omega)}{p^i(\omega_i)}\{1-P^i(\omega_i)\}$ 円分プレーヤー i に「情報レント」発生

定理 6-5：

BIC をみたす直接メカニズム (g,x) がもたらす期待収入は

「Virtual Valuation の和 $\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega)$ の期待値」

（マイナス $\sum_{i\in N} y_i^*(0)$ ）

に等しい：

$$\sum_{i\in N} E[x_i(\omega)] = E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega)] - \sum_{i\in N} y_i^*(0)$$

定理 6-5 の証明：同値定理より、期待支払額は

$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega),\omega)]$$
$$-E_{\omega_i}[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i}) \mid \omega_i']d\omega_i'] - y_i^*(0)$$

分布独立性より、情報レント分は以下のように書き換えられる：

$$E_{\omega_i}[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i}) \mid \omega_i']d\omega_i']$$
$$= E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})d\omega_i']$$

よって

$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega),\omega)]$$
$$-E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})d\omega_i'] - y_i^*(0)$$

＊証明においてすべきこと：

情報レント分 $E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i', \omega_{-i}), \omega_i', \omega_{-i}) d\omega_i']$ を書き換えると

$$E[v_{i2}(g(\omega), \omega)\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}]$$

になることを示すこと

情報レント分 $E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})d\omega_i']$ の中に $v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})$ が登場するのは、ω_i が ω_i' 以上になるケースのみであることに着目せよ。

ω_i が ω_i' 以上になる確率は $1-P^i(\omega_i')$ であるから

$$E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})d\omega_i']$$

$$=E_{\omega_{-i}}[\int_{\omega_i\in\Omega_i} v_{i2}(g(\omega),\omega)\{1-P^i(\omega_i)\}d\omega_i],$$

つまり

$$E[x_i(\omega)]=E[v_i(g(\omega),\omega)]$$

$$-E_{\omega_{-i}}[\int_{\omega_i\in\Omega_i} v_{i2}(g(\omega),\omega)\{1-P^i(\omega_i)\}d\omega_i]-y_i^*(0)$$

と書き換えることができる。（ここのステップがキモ）

よって、情報レント分は、

$$
\begin{aligned}
&E_{\omega_{-i}}[\int_{\omega_i\in\Omega_i} v_{i2}(g(\omega),\omega)\{1-P^i(\omega_i)\}d\omega_i] \\
&= E_{\omega_{-i}}[\int_{\omega_i\in\Omega_i} v_{i2}(g(\omega),\omega)\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}p^i(\omega_i)d\omega_i] \\
&= E[v_{i2}(g(\omega),\omega)\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}].
\end{aligned}
$$

と書ける。よって

$$
E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega),\omega) - v_{i2}(g(\omega),\omega)\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}] - y_i^*(0),
$$

つまり

$$
E[x_i(\omega)] = E[MR_i(g(\omega),\omega)] - y_i^*(0).
$$

つまり

$$
\sum_{i\in N} E[x_i(\omega)] = E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega)] - \sum_{i\in N} y_i^*(0).
$$

Q.E.D.

6. 2. 3. 期待収入最大化問題

参加制約条件（Interim Individual Rationality, IIR, 中間個人合理性）：

$$y_i^*(\omega_i) = E[v_i(g(\omega),\omega) + x_i(\omega) \mid \omega_i] \geq 0$$

期待収入最大化問題

BIC と IIR の制約下で期待収入を最大化せよ！

$$\max_{(g,x)} E[\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)] \text{ subject to BIC and IIR}$$

追加の仮定: 「タイプゼロの時が評価最低」とする：

$$v_i(a,\omega) \geq v_i(a,(0,\omega_{-i})) \text{ for all } a \in A, \ i \in N, \text{ and } \omega \in \Omega$$

ならば、IIR（参加制約）を

$$y_i^*(0) = 0 \text{ for all } i \in N$$

としてよい。

さらに、BIC をみたす支払ルール x が存在する配分ルール g の全体集合を $\hat{G}$ とする。

定理 6-6：BIC および IIR の制約下での期待収入最大化問題は

$$\max_{g \in \hat{G}} E[\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)]$$

に等しい。

期待収入最大化問題の解法例：

限界収入の和の期待値 $E[\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)]$ を、$\hat{G}$ ではなく

配分ルール全体集合 G（一般的に $\hat{G} \neq G$、$\hat{G} \subset G$）について最大化

$$\max_{g \in G} E[\sum_{i \in N} MR_i(g(\omega), \omega)]$$

この解を $\bar{g}$ と記す。

定理 6-2（支払同値）で示される支払いルール（のひとつ）を $\bar{x}$ と記す

分布独立性下で $(\bar{g}, \bar{x})$ が BIC をみたすかどうかをチェックする

BIC をみたすならば、$\bar{g} \in \hat{G}$ が成立している

この場合には、もとめた $(\bar{g}, \bar{x})$ は、期待収入最大化メカニズムである

6. 2. 4. 期待収入最大化問題の例：
単一財一単位
（Private Values を仮定）

リザーブ価格付きの二位価格入札ルールが期待収入を最大化する
ことを示そう

$$v_i(a,\omega_i)=0, \qquad MR_i(a,\omega_i)=0 \qquad\qquad \text{if } \ a\neq i$$

$$v_i(a,\omega_i)=\omega_i, \qquad MR_i(a,\omega_i)=\omega_i-\frac{1-P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)} \qquad\qquad \text{if } \ a=i$$

Virtual Valuation が一番高く
しかも非負である入札者に落札せよ

$$MR_i(i,\omega_i)\geq MR_i(j,\omega_j) \ \text{ for all } \ j\neq i \qquad\qquad \text{if } \ g(\omega)=i$$

$g(\omega)=0$ （売らない） $\qquad$ if $MR_i(i,\omega_i)<0$ for all $i\in N$

このように特定した配分ルール g が BIC になるかどうか
チェック！

仮定（単調増加）：　$MR_i(i,\omega_i) = \omega_i - \dfrac{1 - P^i(\omega_i)}{p^i(\omega_i)}$ は ω_i の増加関数

仮定（分布対称性）：　$p^i(\omega_i) = p^i(\omega_j)$ if $\omega_i = \omega_j$

これらの仮定より

$$[MR_i(i,\omega_i;p^i) \geq MR_j(j,\omega_j;p^j)] \Leftrightarrow [\omega_i \geq \omega_j]$$

評価がより高い入札者はより高い **Virtual Valuation**

リザーブ価格付きの二位価格入札

指値が一番高く、リザーブ価格より高い指値をした入札者が落札
そうでなければ非落札（売らない）
落札者は二位価格とリザーブ価格の大きい方を支払う

単調増加＋分布対称性の仮定下で

リザーブ価格付き二位価格入札は

評価価値が一番高く、リザーブ価格 y 以上である入札者に落札

$$\omega_i \geq \omega_j \text{ for all } j \neq i \qquad \text{if } g(\omega) = i$$
$$g(\omega) = 0 \qquad \text{if } \omega_i < y \text{ for all } i \in N$$

Reserve Price y を以下のように設定：

$$MR_1(1, y) = y - \frac{1 - P^1(y)}{p^1(y)} = 0$$

Virtual Valuation が非負の入札者にのみ落札される

仮定より、評価の高い入札者は高い **Virtual Valuation**

∴ リザーブ価格付きの二位価格入札が
期待収入最大化を実現！

6. 2. 5. 参入促進の効果

Bulow and Klemperer (1996): Auctions versus Negotiations, American Economic Review

単一財一単位取引再考：

リザーブ価格：コミットメントできることが暗黙の仮定

コミットメント効かない：売れ残り認められない

売れ残りを認めない場合の最大化期待収入

$$E[\max[MR_1(\omega_1),.....,MR_n(\omega_n)]]$$

正負に関係なく **Virtual Valuation** の一番高い人に売る

定理 6-7（Bullow and Klemperer (1996)）：

$$E[\max[MR_1(\omega_1),\ldots,MR_n(\omega_n),MR_{n+1}(\omega_{n+1})]]$$
$$> E[\max[MR_1(\omega_1),\ldots,MR_n(\omega_n),0]]$$

リザーブ価格設定よりも
もう一人新しい入札者（どんな奴でも **OK**）を参入させる方が
収入アップに効果的

リザーブ価格設定：
Virtual Valuation が非負の入札者（１～ｎ）がいない
⇒　評価ゼロの人つまり売り手自身にタダであげている（捨てるのと同じ）

ｎ＋１人目を連れてくる：
Virtual Valuation が非負の入札者（１～ｎ）がいない
⇒　ｎ＋１人目に売れ！

（続く）