

2023年11月3日

第8章：オークション（応用編）

オークション基礎編	Private Values:	単一財取引 as special case VCG in general (Individual incentive)
	Interdependent Values:	Winner's Curse Linkage Principle
オークション応用編	Private Values	Multi-unit Multi-Object (position) Multi-Object (package) Cartel (Collective incentive)
	Interdependent Values	

8.1. Multi-Unit Auction

単一財を複数単位売却する

Sequential auction :

一単位ずつ売却

ピカソのリトグラフ、ビンテージワインなど
アノマリー

Simultaneous Auction :

一度に売却：本節のテーマ

国債（金融資産）発行市場： 非分割財

電力市場： 分割可能財

8. 1. 1. Multiunit Auction の 4 つの代表的オークション・ルール

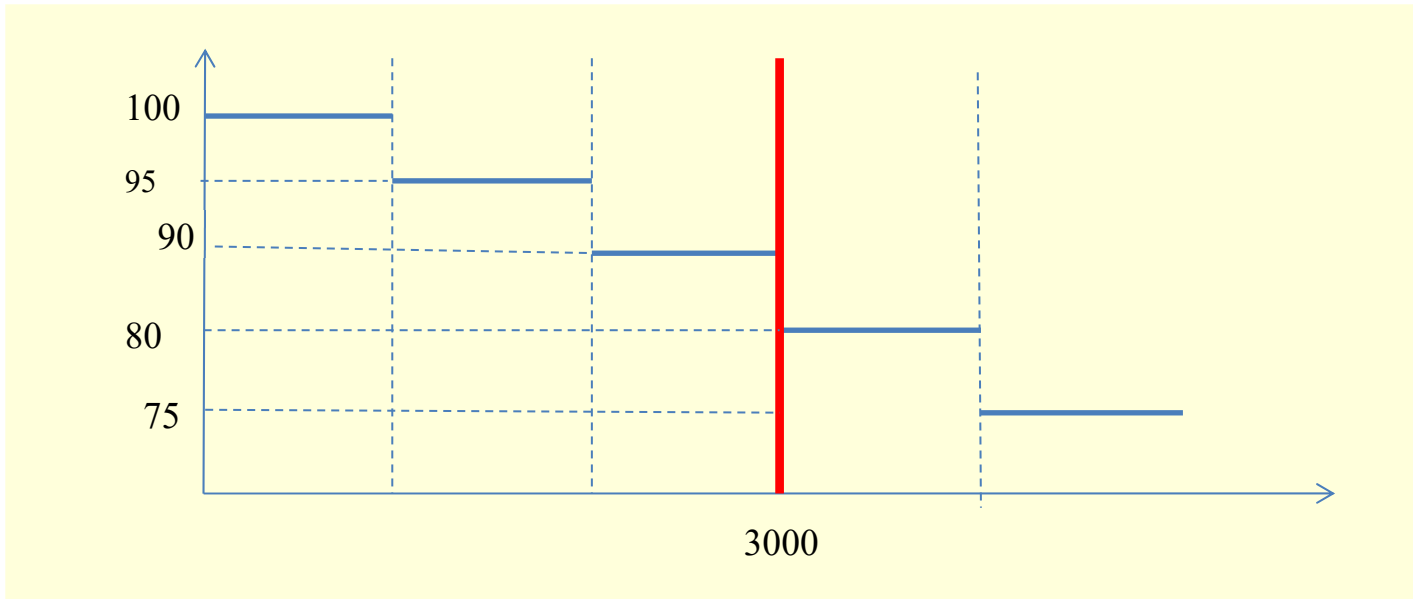
- 封印型 :
- Discriminatory Auction** (差別価格入札) :
 - 一位価格入札の拡張
 - 伝統的な国債発行入札 (日本、英国、ドイツ、フランス…)
 - Uniform Price Auction** (一律価格入札) :
 - 二位価格入札のある意味での拡張 (しかし VCG ではない)
 - アメリカの国債発行入札
- 公開型 :
- Ascending Clock Auction** (せり上げクロック入札) :
 - せり上げの拡張 (非常にポピュラー)
 - 電波オークション
 - Descending (Clock) Auction** (せり下げクロック入札) :
 - せり下げの拡張
 - 花卉オークション

数値例

単一種財 3000 単位を入札で売却：

Bidder 1:	1 単位 75 円で	1000 単位購入希望
Bidder 2:	1 単位 100 円で	1000 単位購入希望
Bidder 3:	1 単位 95 円で	1000 単位購入希望
Bidder 4:	1 単位 80 円で	1000 単位購入希望
Bidder 5:	1 単位 65 円で	1000 単位購入希望
Bidder 6:	1 単位 90 円で	1000 単位購入希望

⇒ 上位の **Bidders 2, 3, 6** に 1000 単位ずつ売却：効率的配分（正直なら）



Discriminatory auction (差別価格入札)

封印型

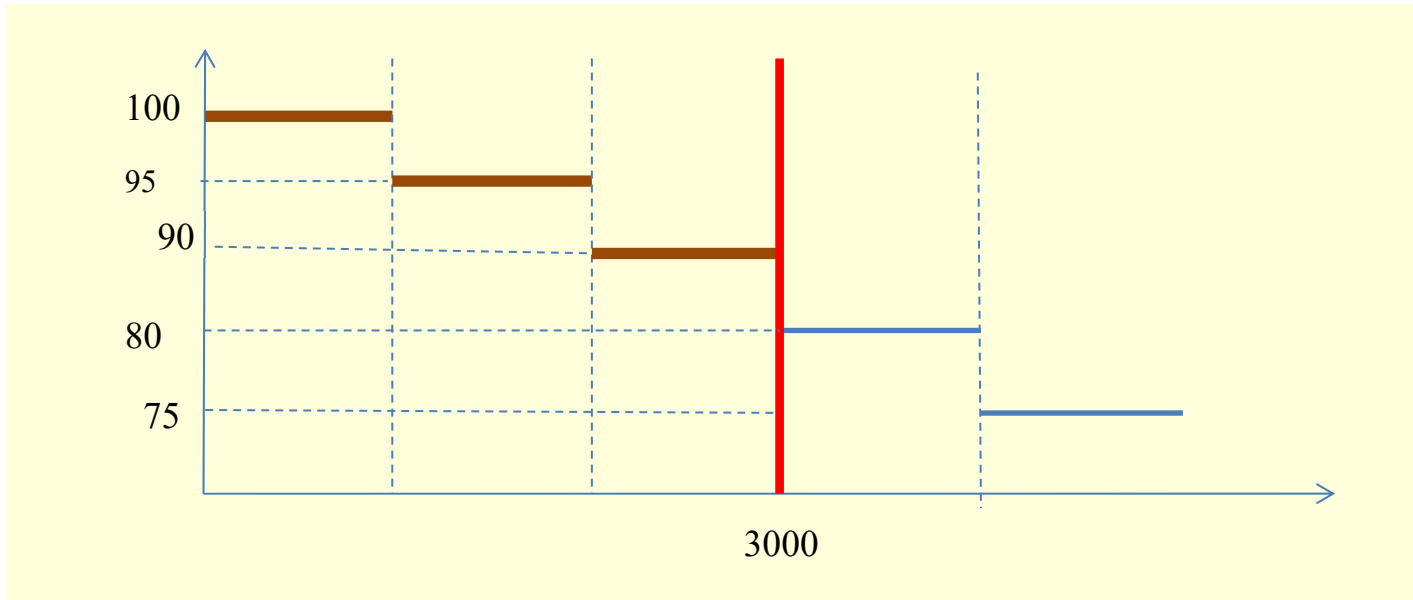
本人の言い値で売却：

Bidder 2: 100円 × 1000単位 = 100000円支払う

Bidder 3: 95円 × 1000単位 = 95000円支払う

Bidder 6: 90円 × 1000単位 = 90000円支払う

計 $100000 + 95000 + 90000 = 285000$ 円の収入



より厳格な定義：
各入札者に「需要関数」を表明してもらおう

入札者 $i \in N$ は

「一単位目に 110 円、2 単位目に 90 円、3 単位目に 80 円、4 単位目に 79 円、...、
2999 単位目に 2 円、3000 単位目に 1 円払っていい」と表明

つまり需要関数を表明：

$D_i : [0, \infty) \rightarrow \{0, \dots, \}$: 右下がりの関数

「任意の単位価格 $p \in \{0, 1, \dots\}$ における私の需要は $D_i(p)$ 単位です」

表明された総需要関数は $D : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \}$ ($D(p) \equiv \sum_{i \in N} D_i(p)$)

固定量 S 単位が供給されるとすると：

需給均衡 $D(p) = S$ をみたす（最低）価格 p より高い **Willingness to Pay** の需要が取引対象

取引価格は各単位における「**Willingness to Pay**」（差別価格）に設定される

$P = 80$ ならば入札者 i は 3 単位購入

1 単位目 110 円、2 単位目 90 円、3 単位目 80 円

合計 $110 + 90 + 80 = 280$ 円支払う。

Uniform Price Auction (一律価格入札)

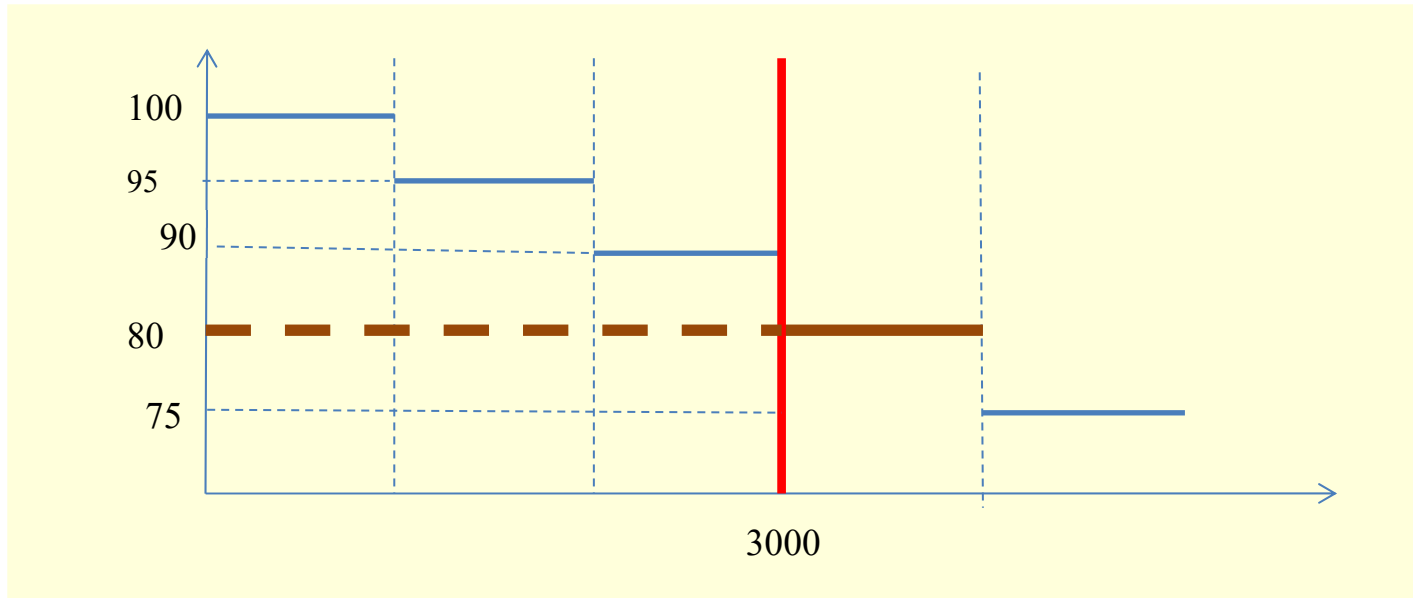
実務ではこれを **Dutch auction** と呼ぶので要注意。通常 **Dutch Auction** はせり下げを意味する

封印型

最低落札価格（90円）と最高非落札価格（80円）の間の任意の一律価格で売却
理論の慣例として、**最高非落札価格80円**とする

VCG とは異なる意味合いにおいて「二位価格入札」の拡張（後述）

Bidder 2:	80 円	×	1000 単位	=	80000 円支払う
Bidder 3:	80 円	×	1000 単位	=	80000 円支払う
Bidder 6:	80 円	×	1000 単位	=	80000 円支払う
計	80000 + 80000 + 80000 = 240000 円の収入				



より厳格な定義：
各入札者に需要関数を表明してもらう

入札者 $i \in N$ は

「一単位目に 110 円、2 単位目に 90 円、3 単位目に 80 円、4 単位目に 79 円、...、
2999 単位目に 2 円、3000 単位目に 1 円払っていい」と表明

つまり需要関数を表明：

$D_i : [0, \infty) \rightarrow \{0, \dots, \}$: 右下がりの関数

「任意の単位価格 $p \in \{0, 1, \dots\}$ に対する需要は $D_i(p)$ 単位です」

表明された総需要関数は $D : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ ($D(p) \equiv \sum_{i \in N} D_i(p)$)

(ここまでは **Discriminatory Auction** と同じ)

固定量 S 単位が供給されるとすると：

需給均衡 $D(p) = S$ をみたす (最低) 価格 p より高い **Willingness to Pay** の需要
が取引対象

取引価格は「一律 p 円」

$P = 80$ ならば入札者 i は 3 単位購入：合計 $80 \times 3 = 240$ 円支払う。

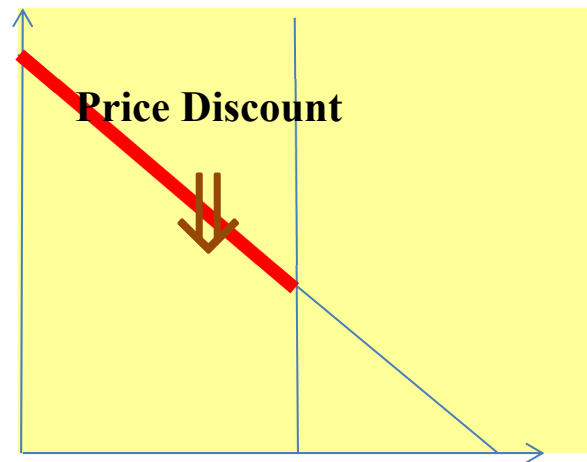
Discriminatory Auction と Uniform Price Auction どっちがいい？

甲乙つけがたし： 理論的にも実証的にもなんともいえない
理論： **Bach and Zender (93)**
実証： **Archibald and Malvey (1998), Hortaçsu and McAdams (2010)**

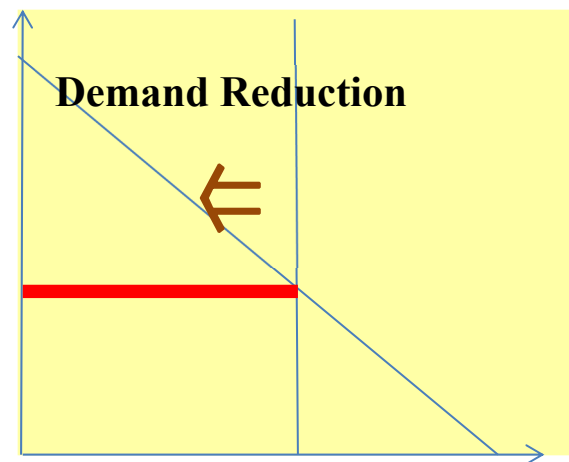
Discriminatory Auction の問題点： **Price Discount**
安く指値しようとする
その結果低価格、非効率も

Uniform Price Auction の問題点： **Demand Reduction**
少なめに需要表明しようとする
その結果低価格、非効率も

Discriminatory では「**Price Discount**」発生



Uniform Price Auction では「**Demand Reduction**」発生



Ascending Clock Auction (せりあげクロック入札)

公開型 : High Popularity

セリ人 (オークショニア) が単位価格をせりあげる

入札者はセリ人の公示価格にたいして需要を表明

総需要が供給をうわまわれれば、さらにせりあげ

総需要と供給が一致すると、せり上げ終了

せり終了時の単位価格 (一律価格) ですべての単位を取引する

たとえば入札者 $i \in N$ は

「1円まで 3000 単位、2円まで 2999 単位,..., 79円まで 4 単位、80円まで 3 単位
90円まで 2 単位、110円まで 1 単位、それを超えると需要ゼロ」

という戦略をとるとしよう

一律価格が 80円ならば入札者は 3 単位を一律 80円合計 240円支払うことになる

「せりあげクロック式 (公開型)」は「一律価格入札 (封印型)」
と同じゲームになる

(せり上げ入札と二位価格入札との類似に対応)

「Demand Reduction」という非効率性問題を抱える

Descending Clock Auction (せりさげクロック式)

花卉 (かき) オークション

アールスメール (アムステルダム)



大田区大田市場



公開型

せり人（オークション）が単位価格を高水準から徐々にせり上げていく

入札者は競り人の公示価格にたいして需要を表明する

需要を追加表明した時点での価格で随時取引成立

総需要が供給をしたまわれる限り、さらにせり上げる

総需要と供給が一致すると、せり上げ終了

たとえば入札者 $i \in N$ は

「110 円を超える価格ならば需要ゼロ、110 円にて 1 単位需要表明
 90 円にて追加一単位 (2 単位目)、80 円にて追加一単位 (3 単位目)
 79 円にて追加一単位 (4 単位目) , ...,
 2 円にて追加 1 単位 (2999 単位目)、1 円にて追加 1 単位 (3000 単位目)」

という戦略をとるとしよう

せりあげ終了時の価格が 80 円ならば、この入札者は一単位目を 110 円、2 単位目
 を 90 円、3 単位目を 80 円
 合計 3 単位を、合計 $110 + 90 + 80 = 280$ 円支払って購入

「せりさげクロック式 (公開型)」は「差別価格入札 (封印型)」
 と同じゲームになる
 (せりさげ入札と 1 位価格入札との類似に対応)

「Price Discount」という非効率性問題を抱える

8. 1. 2. Vickrey Auction (VCG メカニズム)

4 つの標準的なオークション・ルールでは一般的に
優位戦略は存在しない

(Price discount, Demand reduction)

効率的配分が達成される保証もない
つまり VCG メカニズムではない！

Multiunit Auction における
VCG メカニズムはどのような方式になるか？

Vickrey Auction !

Vickrey Auction (VCG Mechanism in Multiunit Allocation)

$K \geq 2$ units 供給

入札者のタイプ : $\omega_i = (\omega_i^1, \dots, \omega_i^K) \in \Omega_i$

ω_i^k とは : Bidder i 's valuation for k -th additional purchase

$$\omega_i^1 \geq \omega_i^2 \geq \dots \geq \omega_i^K \geq 0$$

配分 : $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$

$$\sum_{i \in N} a_i \leq K$$

$a_i \in \{0, \dots, K\}$ とは : Number of bidder i 's purchases

入札者 i の利得 : $v_i(a, \omega_i) = \sum_{k=1}^{a_i} \omega_i^k$

Vickrey Auction (g, x) の定義 :
(VCG メカニズムを Multi-Unit に応用)

効率的配分ルール g

財評価の高い順に割り当てる :

任意の $i \in N$, 任意の $j \in N$, 任意の ω について

$$\omega_i^{a_i} \geq \omega_j^{a_j+1}, \text{ where } g(\omega) = a = (a_i)_{i \in N}$$

支払ルール x_i

入札者 i 以外の入札者の $(n-1)K$ 個の財評価

$\{\omega_j^k\}_{k \in \{1, \dots, K\}, j \in N \setminus \{i\}}$ を

大きい値から順番にならべよ！

$$\delta^1(\omega_{-i}, i) \geq \delta^2(\omega_{-i}, i) \geq \dots \geq \delta^{(n-1)K}(\omega_{-i}, i)$$

For each $h \in \{1, \dots, (n-1)K\}$,

there exists $(j, k) \in (N \setminus \{i\}) \times \{1, \dots, K\}$ such that

$$\delta^h(\omega_{-i}, i) = \omega_j^k.$$

支払いルールを

$$x_i(\omega) = \sum_{k=K-a_i+1}^K \delta^k(\omega_{-i}, i), \text{ where } a = g(\omega)$$

と特定化

入札者 i 以外の評価のうち、 $K - a_i + 1$ 番目から K 番目までの計 a_i 個を足したものの。

うしろの a_i 個は入札者 i に取られてしまう。よって値 $\sum_{k=K-a_i+1}^K \delta^k(\omega_{-i}, i)$

は「入札者 i が加わったことによって他の人が被る損失分」！

例で考えよう： $K = 5$ 、 $n = 5$

	1 単位目	2 単位目	3 単位目	4 単位目
入札者 1	100	51	11	9
入札者 2	120	102	73	10
入札者 3	60	45	35	20
入札者 4	70	12	0	0
入札者 5	80	75	74	55

入札者 1 が払う額は 74 円
 入札者 2 が払う額は $74 + 70 = 144$ 円
 入札者 3 が払う額は 0 円
 入札者 4 が払う額は 0 円
 入札者 5 が払う額は $73 + 70 = 143$ 円
 (Think why)

8. 1. 3. Ausubel Mechanism

Vickrey Auction (VCG) は残念ながら実際にはほとんど使われていない
 様々な理由あり：例えば

「支払い額がどのように決まるか入札者にわかりづらい」

一方、「公開型（せりあげ）」は一般にわかりやすいとされる：
 せり上げの途中で支払価格が明らかにされていく
 観察された価格情報をもとに指値の判断をすると楽

Cognitive Psychology:

Hypothetical Thinking（仮説的思考）

「頭の中で相手の出方についてあれこれ仮説を立てて考える」
 苦手

⇒ **Information Extraction from Observations**

「観察されたものに反応する」
 こっちの方が楽（cf. ローマ帝国帝位は反例）

Ausubel Mechanism

オースベルによって提案された

Vickrey Auction の公開型バージョン

わかりやすい入札ルールへの提案（まだあまり普及していないが）

「せり上げの途中で購入が確実になった場合
購入が確実になった時点の価格で
購入確実になった単位分が取引される」

とする公開型入札ルール

例で考えよう： $K = 5$ 、 $n = 5$

	1 単位目	2 単位目	3 単位目	4 単位目
入札者 1	100	51	11	9
入札者 2	120	102	73	10
入札者 3	60	45	35	20
入札者 4	70	12	0	0
入札者 5	80	75	74	55

セリ人がゼロ円からせりあげ
 需要は正直表明（インセンティブも OK）

価格が 69 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位 :	自分以外の需要は 7 単位
入札者 2 は 3 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 3 は 0 単位 :	自分以外の需要は 8 単位
入札者 4 は 1 単位 :	自分以外の需要は 7 単位
入札者 5 は 3 単位 :	自分以外の需要は 5 単位

自分以外の需要は供給量 5 以上 : 自分以外に財を配分したら一単位も残らない

価格が 70 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位： 自分以外の需要は 6 単位
入札者 2 は 3 単位： 自分以外の需要は 4 単位
入札者 3 は 0 単位： 自分以外の需要は 7 単位
入札者 4 は 0 単位： 自分以外の需要は 7 単位
入札者 5 は 3 単位： 自分以外の需要は 4 単位

入札者 2 および入札者 5 については自分以外の需要は供給量 5 未満（4）：
自分以外に財を配分しても 1 単位のこる

よって、入札者 2 と 5 は、この時点で各々 1 単位の購入が確定する

価格は確定時の価格 70 円とする

価格が 73 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 2 は 2 単位 :	自分以外の需要は 4 単位
入札者 3 は 0 単位 :	自分以外の需要は 6 単位
入札者 4 は 0 単位 :	自分以外の需要は 6 単位
入札者 5 は 3 単位 :	自分以外の需要は 3 単位

入札者 5 は 2 単位目の購入が確定 :

価格は 73 円とする

価格が 74 円までせりあがる

入札者 1 は 1 単位 :	自分以外の需要は 4 単位
入札者 2 は 2 単位 :	自分以外の需要は 3 単位
入札者 3 は 0 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 4 は 0 単位 :	自分以外の需要は 5 単位
入札者 5 は 2 単位 :	自分以外の需要は 3 単位

入札者 1, 2 は各々 1 単位目、 2 単位目の購入が確定 :

価格は 74 円とする

この段階で
「入札者 1 は 1 単位、入札者 2 は 2 単位、入札者 5 は 2 単位」
合計 5 単位すべて確定

せり上げの途中で
落札価格が購入単位ごとに確定する手順がわかるので
入札者に混乱はあまりないはず

(いかがでしょうか?)

(続く)