

第13章：ゲーム理論と寡占 (2)

二つの代表的なゲーム表現形式

標準形ゲーム： 同時手番 (**Simultaneous Moves**)
各プレイヤーは戦略を同時に決定
ナッシュ均衡
静学ゲーム

展開形ゲーム： 逐次手番 (**Sequential Moves**)
プレイヤーは順番に行動選択
部分ゲーム完全均衡
動学ゲーム

動学ゲーム

(行動選択のタイミングを考慮する必要のある状況) には、標準形ゲームではなく「展開形ゲーム」が使われる

本章のメインテーマ

- 展開形ゲーム (**Extensive-Form Game**)
- 逐次合理性 (**Sequential Rationality**) あるいは部分ゲーム完全均衡

展開形ゲームは動学ゲームのためのモデル化の方法

特に重要な行動パターン

- **コミットメント (Remember Chap. 11)**
- **Credible Threat**
- **暗黙の協調**

13.1. 展開形ゲーム

Battle of Sexes 再考：静学ゲーム（同時手番）

| | | 男性 | |
|----|----------|----------|---------|
| | | ラブコメ (L) | ホラー (H) |
| 女性 | ラブコメ (L) | 2 1 | 0 0 |
| | ホラー (H) | 0 0 | 1 2 |

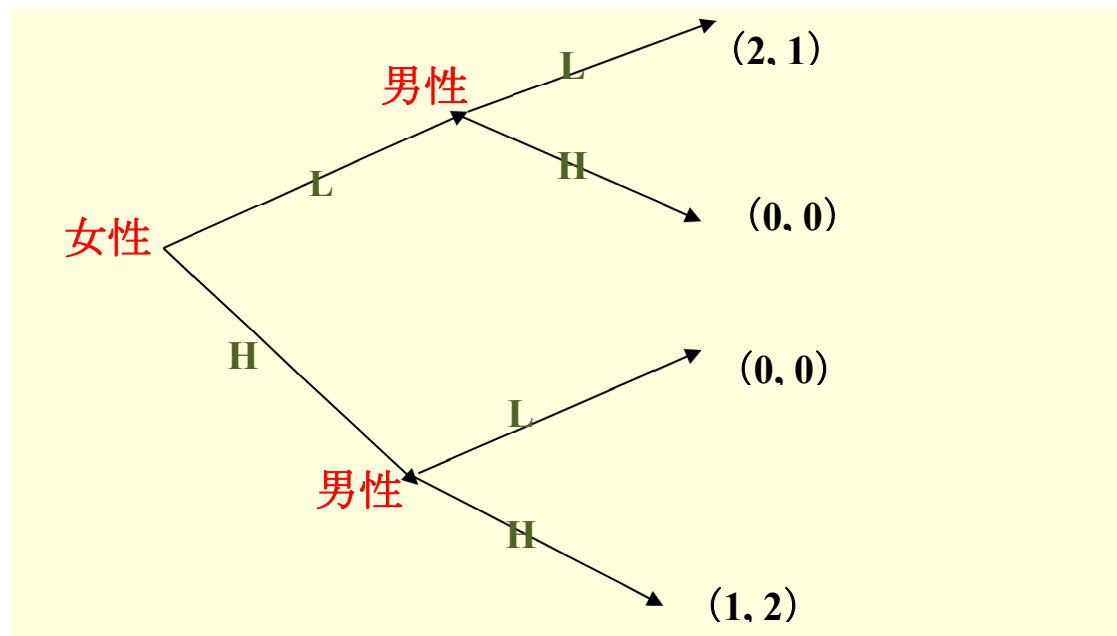
複数の純粋戦略ナッシュ均衡： (L、L) (H、H)

ゲームのルールを変えてみよう！

⇒ (女性による) コミットメントの導入

Battle of Sexes : 動学ゲーム (逐次手番)

女性先手、男性後手 : 女性は場所に「コミットメント」
女性が先に映画館に赴き
携帯で男性に居場所を知らせる
ゲームのルールは変わった!



Battle of Sexes : 動学ゲーム (逐次手番)

女性の手番 (行動選択のタイミング) はひとつのまま
しかし男性の手番は「ふたつ」に増えている

女性の戦略は 2 通り : **L H**

男性の戦略は 4 通り : **(L, L) (L, H) (H, L) (H, H)**

戦略とは (徹底された)「行動の計画」のことである

男性の戦略： 「女性が L を選択したならば L or H」
「女性が H を選択したならば L or H」
∴ $2 \times 2 = 4$ 通りあることになる

* 「徹底された」の意味は...

自分が選択する予定のない行動の後の行動についても計画に含める必要がある (後述)

動学ゲームを標準形ゲームに還元してみると.....

| | | 男性 | | | |
|----|---|-------|-------|-------|-------|
| | | (L、L) | (L、H) | (H、L) | (H、H) |
| 女性 | L | 2 1 | 2 1 | 0 0 | 0 0 |
| | H | 0 0 | 1 2 | 0 0 | 1 2 |

純粋戦略ナッシュ均衡は三つある：

 (L、(L、L))： ラブコメ映画へ

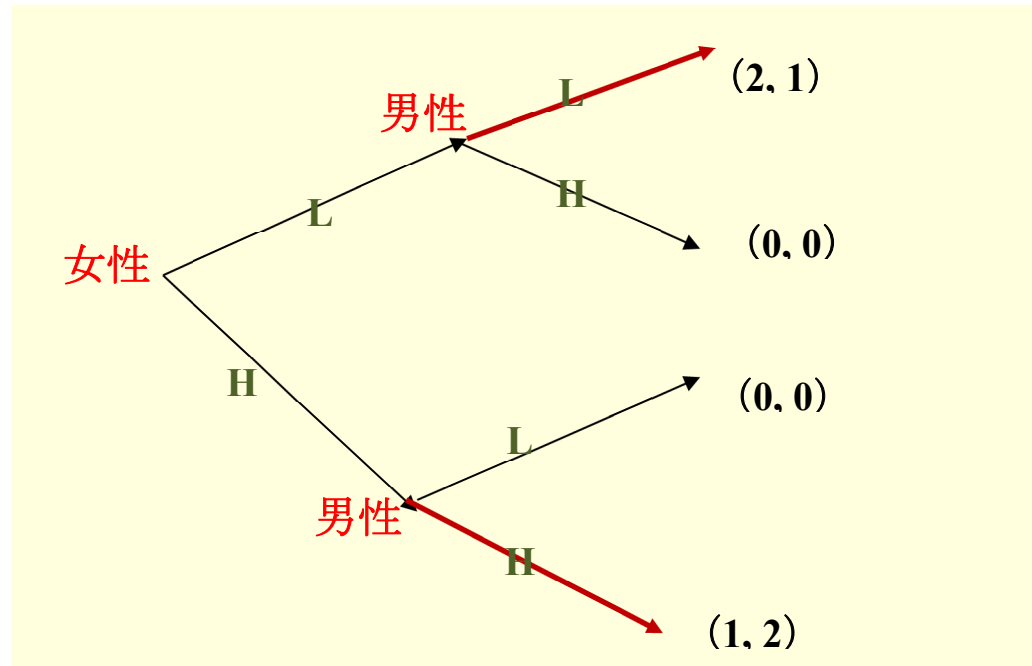
 (L、(L、H))： ラブコメ映画へ

 (H、(H、H))： ホラー映画へ

(L、(L、H)) のみが「理にかなった」ナッシュ均衡である：
Why?

13.2. 逐次合理性 (Sequential Rationality)

プレイヤーは「どのタイミングにおいても」合理的であると仮定



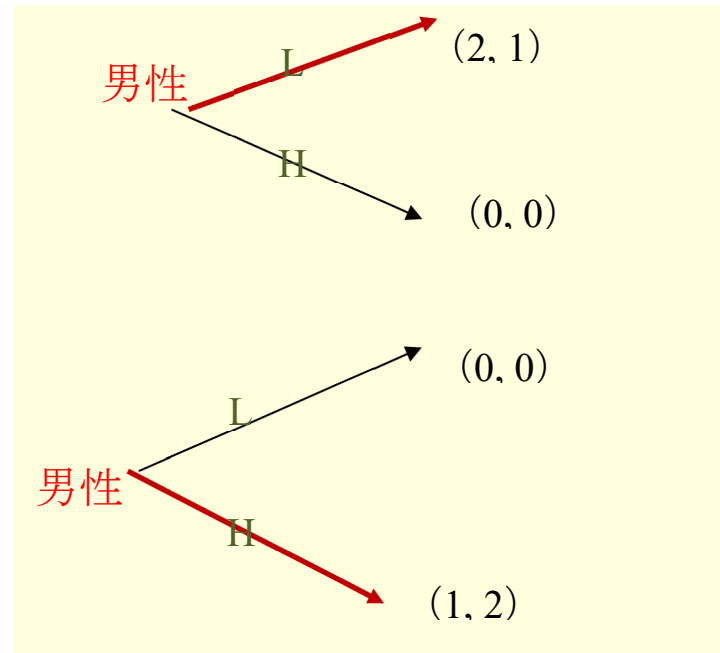
男性の戦略は (L、H) のみ逐次合理性をみたす：

- (L、L)： 女性が H を選んだのに L を選ぶのは非合理的
- (H、H)： 女性が L を選んだのに H を選ぶのは非合理的
- (H、L)： 女性が L を選んだのに H、女性が H を選んだのに L を選ぶのは非合理的

部分ゲーム

展開形ゲームには異なるタイミングから始まる「部分ゲーム」が内包されている
(女性からはじまる (部分) ゲーム 1 つ、男性からはじまる部分ゲーム 2 つ)

男性からはじまる二つの「部分ゲーム」

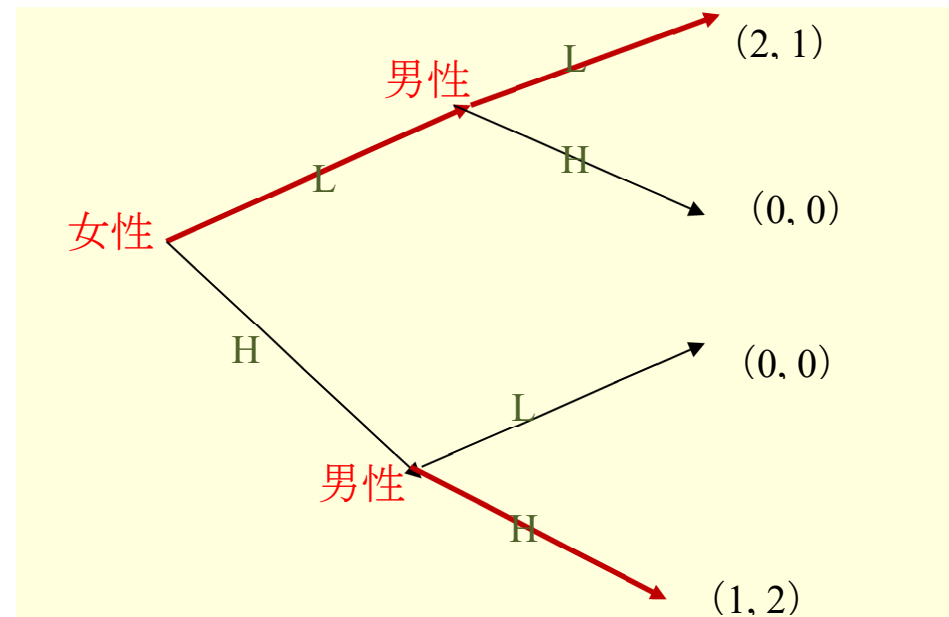


部分ゲーム完全均衡

逐次合理性をみたすナッシュ均衡

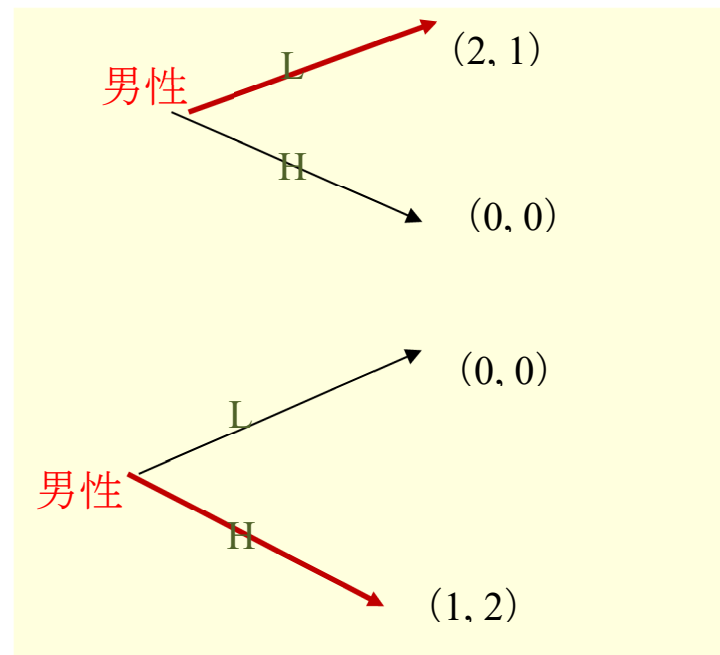
(全ての部分ゲームにおいてナッシュ均衡がプレイされるナッシュ均衡)

ナッシュ均衡を精緻化：部分ゲーム完全均衡は唯一 (L、(L、H)) のみ



部分ゲーム完全均衡を導く便利な方法
後方帰納法 (**Backward Induction**) 「後ろから解け」

二つの部分ゲームから解け



部分ゲーム完全均衡は
「からおどし (**Incredible Threat**)」を排除する

(H、(H、H)) : ナッシュ均衡だが逐次合理性をみたさない
「ラブコメ」を選ぶと「ホラー」を選ぶぞ
これは「からおどし (**Incredible Threat**)」

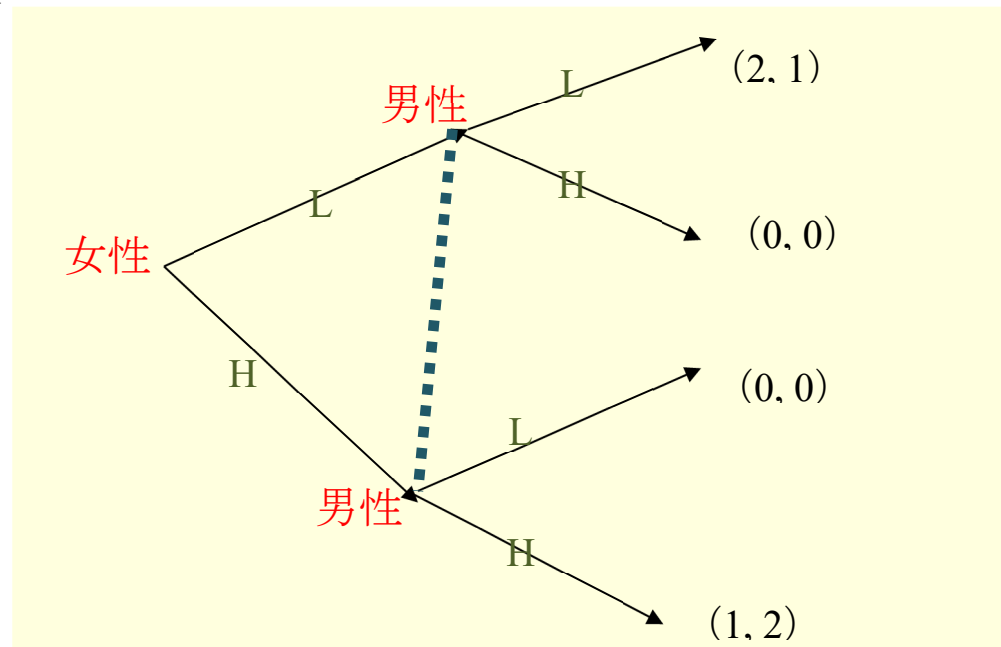
からおどし 計画したことがその場になると実行しない
時間非整合性 (**Time Inconsistency**)

逐次合理性 : 「実行力ある脅し (**Credible Threat**)」だけを考慮
時間整合性 (**Time Consistency**)

13.3. 完全情報と不完全情報

完全情報 (Perfect Information) : 女性がどちらの映画館に行ったかが男性に伝わる

不完全情報 (Imperfect Information) : 伝わらない (携帯が繋がらない)



情報集合 (Information Set) : 男の手番ではどちらの Nodes にいるか区別できない
どちらの Node でも同じ選択にならざるを得ない

不完全情報の動学ゲームを標準形ゲームに還元してみると.....

| | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|--------|
| | | 男性 | | | |
| | | (L, L) | (L, H) | (H, L) | (H, H) |
| 女性 | L | 2 1 | 2 1 | 0 0 | 0 0 |
| | H | 0 0 | 1 2 | 0 0 | 1 2 |

不完全情報の動学ゲームを
標準形ゲームに還元してみると.....

| | | | |
|----|---|-----|-----|
| | | 男性 | |
| | | L | H |
| 女性 | L | 2 1 | 0 0 |
| | H | 0 0 | 1 2 |

同時手番と同じ標準形ゲーム：

「同時手番」、「女性先手男性後手の不完全情報ゲーム」、
「男性先手女性後手の不完全情報ゲーム」はみな
同じ標準形ゲームに還元される

コミットメントは 完全情報の動学ゲームにおいてのみ **Credible** である

先に「ラブコメ映画館」にいても、男性にそれが伝わらなければ効果がない

先に「ラブコメ映画館」にいても、簡単に「ホラー映画館」に移動できてしまえば効果がない

13.4. ゲーム理論による寡占（複占）市場分析

第 12 章 6 節： 静学ゲーム（同時手番）
クールノー数量競争
ベルトラン価格競争

本節： 動学ゲーム（逐次手番）
先手と後手： シュタツケルベルク数量競争
投資と競争： 立地と価格の動学ゲーム

初期の行動決定がコミットメント機能になる

13.4.1. シュタツケルベルク複占

クールノー複占の「ゲームのルール」を変える：
企業1がコミットメント

先手（企業1）： 先に供給量を決定
後手（企業2）： 先手の供給量を観察してから供給量を決定
それ以外はクールノーモデルと同じモデル

企業1（先手）の戦略： $s_1 \in [0,1)$
企業2（後手）の戦略： 企業2の手番は無数：部分ゲームは無数にある
企業1の選択 $s_1 \in [0,1)$ ごとに企業2の手番がある

∴ $s_2 : [0,1) \rightarrow [0,1)$
企業1の供給が $s_1 \in [0,1)$ の場合
企業2の供給は $s_2(s_1) \in [0,1) : s_1$ に依存

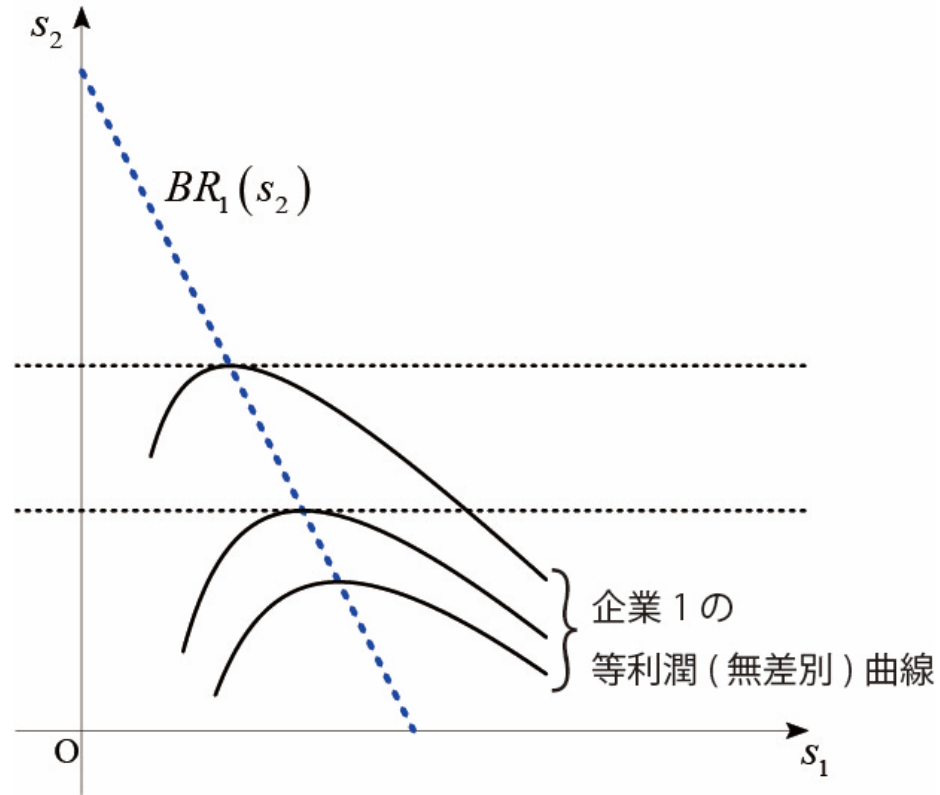
部分ゲーム完全均衡をもとめてみよう！

後方帰納法：後手から解け

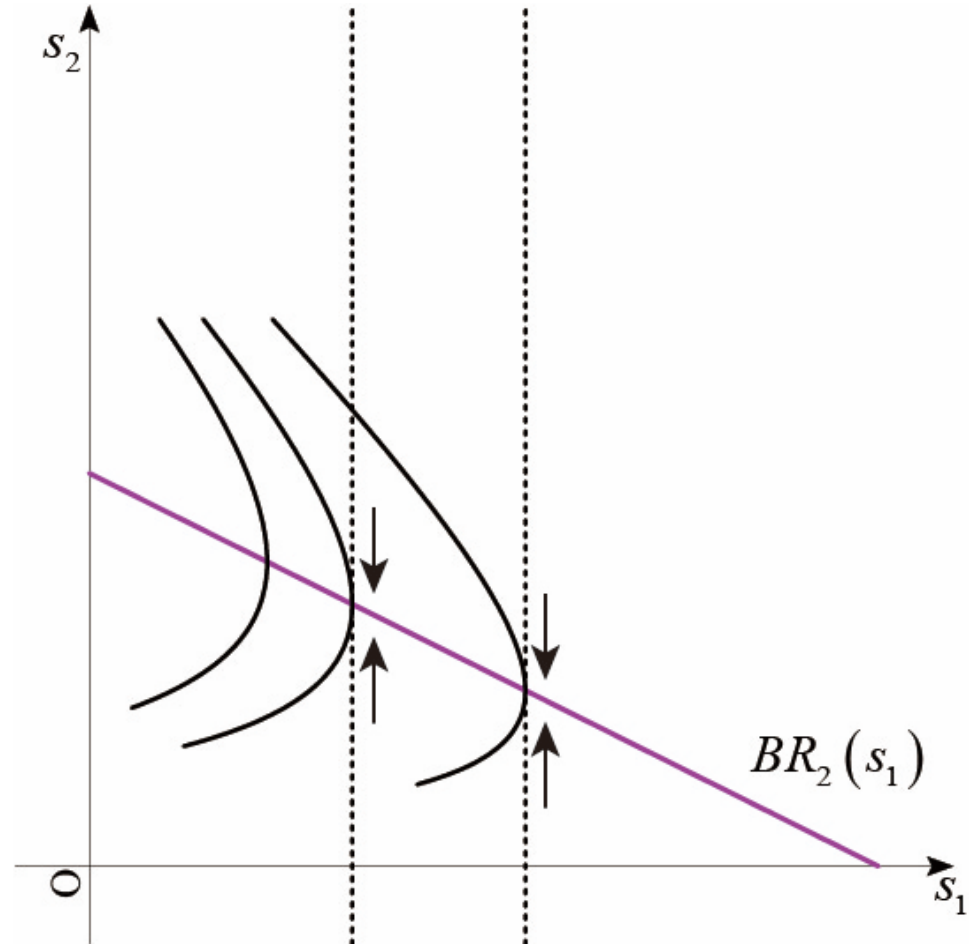
企業2は企業1（先手）が選択した供給量 $s_1 \in [0, \infty)$ に対する最適反応を選択する：

$$s_2(s_1) = BR_2(s_1) = \frac{1-s_1}{2}$$

企業1の等利潤曲線群 (Think why)



企業 2 の等利潤曲線群



↑ 最適反応曲線：企業 2 の最適戦略

先手は後手の反応を読みこめ！

企業1（先手）は

「企業2（後手）が最適反応 $s_2(s_1) = BR_1(s_1)$ を選択する」ことを読み込む

「自社の供給量を増やすと相手は供給量を減らす（戦略的代替）」

$$\max_{s_1 \in [0,1]} \{1 - s_1 - BR_2(s_1)\}s_1$$

一階条件：

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left\{1 - s_1 - \frac{1 - s_1}{2}\right\}s_1 = 0$$

$$\therefore s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = BR_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

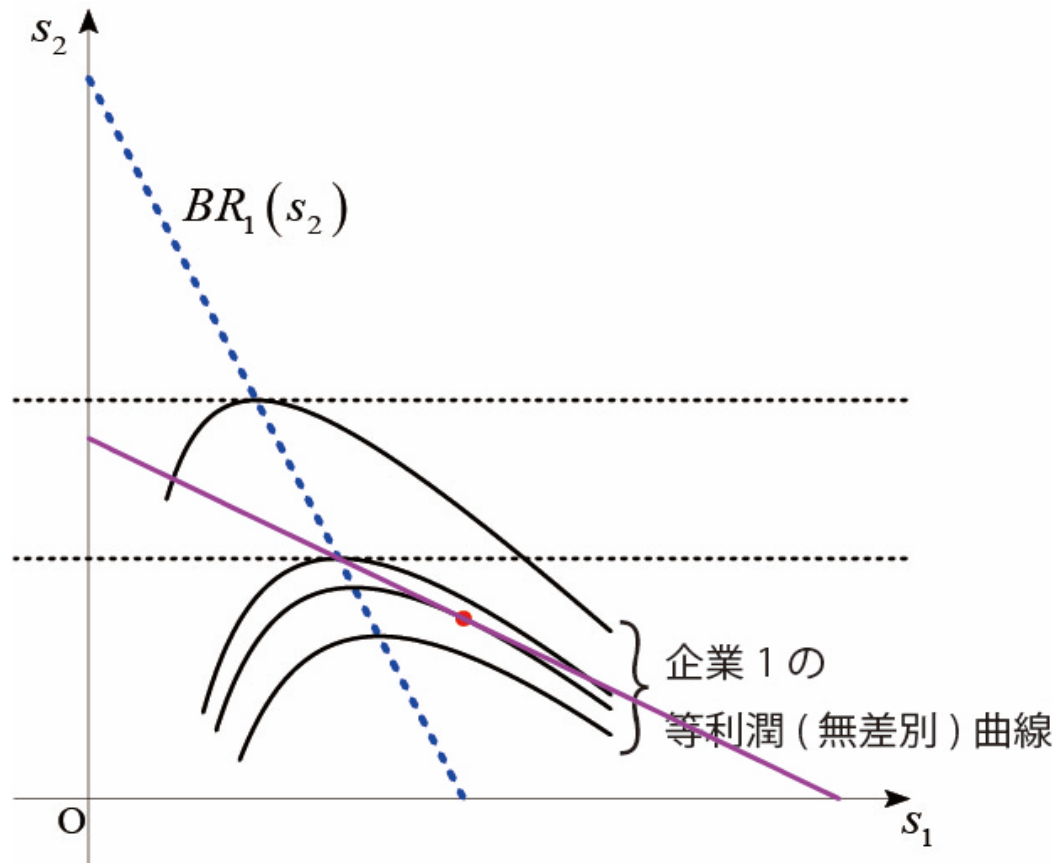
部分ゲーム完全均衡は（先手の戦略 $\frac{1}{2}$ ，後手の戦略 BR_2 ）

均衡における供給量は先手 $\frac{1}{2}$ ，後手 $\frac{1}{4}$

$$\text{総供給量 } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

部分ゲーム完全均衡 (Think why)

先手企業1は、赤ライン（後手の最適反応曲線 $BR_2(s_1)$ ）上で一番利潤が高くなる点を選ぶ



先手によるコミットメント効果

$$s_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

企業1は

「私がクールノー均衡より多めの供給 ($\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$) にコミットすれば
 企業2にとってクールノー均衡より少なめに供給する ($\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$) のが合理的である」
 ことを読み込むことで、利益を高める

価格はクールノー均衡と比べて $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{4}$ にダウンする (消費者にメリット)

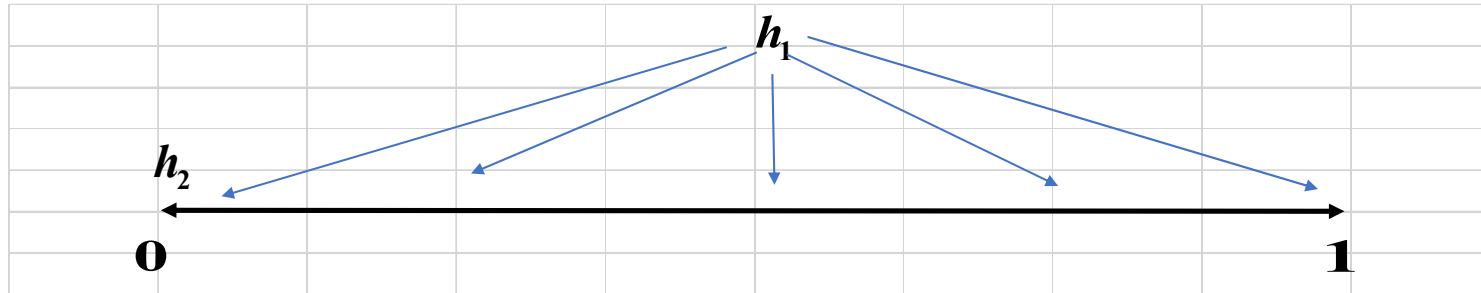
企業1の利潤は $\frac{1}{9}$ から $\frac{1}{8}$ にアップ

(企業2の利潤は $\frac{1}{9}$ から $\frac{1}{16}$ にダウン)

企業1は、企業2と生産技術は同じなのに、先手にコミットする (ゲームのルール) を変えることによって、より有利になれる。

供給量が増え消費者にメリット：しかし企業2が退出する事態になると消費者にデメリット

13.4.2. 立地と価格の動学ゲーム（言葉のみの説明）



消費者は区間 $[0,1]$ に一様分布している

企業2は地点0に店を構えている（立地地点0固定）

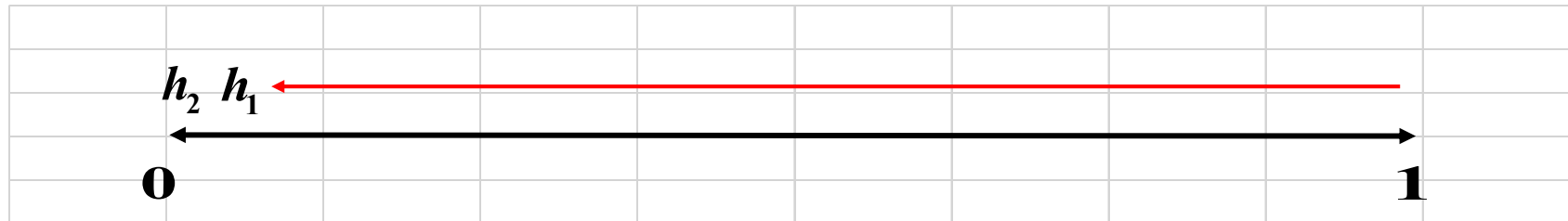
企業1が参入しようとしている

企業1は区間 $[0,1]$ のどの地点に立地するのがいいか？

当初の案：

地点0のすぐ右隣りに立地しよう！

お客さんを全部取ることができる
(右側に位置する消費者はみな企業1の店舗に来る)



はなれた立地は製品差別化を意味する

差別化の余地が十分にあるにもかかわらず
企業1はあえてライバルと同じ立地（同質財）を選んで
市場のシェアを占有しようと考えた
(cf. 独占的競争)

しかしこの案は却下：Why?

新しい案：
地点1に立地しよう！

企業1は、企業2との戦略的相互依存を
以下の動学ゲームとして知覚した

- 第1期： 企業1は立地 $h_1 \in [0,1]$ を決める。
第2期： 企業1と企業2は、自社財価格 $p_1 \in [0, \infty)$ 、 $p_2 \in [0, \infty)$
を同時に決める価格競争をする（不完全代替財のベルトラン競争）

地点0に立地するのは最悪： 激しい価格競争
利益は期待できない

地点0から離れた場所がベスト： 価格競争は緩和
協調関係成立
製品差別化促進（ex. 独占的競争）

13.4.3. ビジネス戦略の四つの類型

ビジネス戦略： コミットメントとしての初期投資決定
(製品差別化、R&D 投資、他市場への投資など)

競争戦略： 価格競争 (ベルトラン風)、数量競争 (クールノー風)

「威嚇 (Deterrence) か和解 (Accommodation) か」

| | |
|-----------------------------|--------------------|
| Top Dog | 初期投資を増やして相手の利得を下げる |
| Fat Cat | 初期投資を増やして相手の利得を上げる |
| Puppy Dog | 初期投資を減らして相手の利得を上げる |
| Lean and Hungry Look | 初期投資を減らして相手の利得を下げる |

| | タフ投資 (相手にダメージ) | ソフト投資 (相手にメリット) |
|-------|------------------|-----------------------------|
| 戦略的代替 | Top Dog | Lean and Hungry Look |
| 戦略的補完 | Puppy Dog | Fat Cat |

- シュタツケルベルク複占： 戦略的代替
タフ投資
先手は「**Top Dog**」
- 立地と価格の動学ゲーム： 戦略的補完
タフ投資 (相手に近づく と相手にダメージ)
企業1は「**Puppy Dog**」
- 他市場から参入 (数量競争)： 戦略的代替
ソフト投資 (他市場での投資、範囲の不経済性)
新規企業は「**Lean and Hungry Look**」
- 他市場から参入 (価格競争)： 戦略的補完
ソフト投資 (他市場での投資、範囲の不経済性)
新規企業は「**Fat Cat**」

13.5. 繰り返しゲーム (Repeated Game)

囚人のジレンマ再考

| | c | d |
|---|------|------|
| c | 1 1 | -1 2 |
| d | 2 -1 | 0 0 |

優位戦略プロファイルは (d, d) である
 しかし (c, c) は (d, d) からのパレート改善になる

「ゲームのルール」を変えることによって (c, c) が実現できるかもしれない
 どうやって？

長期的関係と暗黙の協調

「囚人のジレンマが長期にわたって継続されている」
囚人のジレンマの「繰り返しゲーム」をプレイしている

この場合には
「(c、c) が繰り返しプレイされる」行動パターンが
部分ゲーム完全均衡によって実現されうる：
「暗黙の協調」が成立

トリガー戦略

繰り返しゲームにおける代表的な戦略

第1期： c を選択
 任意の $t \geq 2$ 期： 過去にずっと (c, c) がプレイされていれば c を選択
 一度でも (c, c) 以外がプレイされていれば d を選択

割引ファクター $\delta \in (0, 1)$

每期 $t \in \{1, \dots, T\}$ に利得 $u_i(a(t))$ を獲得

繰り返しゲームの利得は「割引現在価値の和」：

$$u_i(a(1)) + \delta u_i(a(2)) + \dots + \delta^{t-1} u_i(a(t)) + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(a(t))$$

割引ファクター $\delta \in (0,1)$ が十分大きい場合
 トリガー戦略プロファイルは部分ゲーム完全均衡になる
 \therefore ずっと (c,c) がプレイ

トリガー戦略にしたがえば $1 + \delta + \delta^2 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$

d を選択すると以降 (d,d) の繰り返し $2 + \delta \times 0 = 2$

割引ファクターが $\delta \geq \frac{1}{2}$ ならば $\frac{1}{1-\delta} \geq 2$

\therefore トリガー戦略にしたがったほうがいい

d を選択すると今期の利得は高まる（1から2）が
 将来利得機会を失う（ $\frac{\delta}{1-\delta}$ からゼロ）ことになる

将来利得を重視する（割引ファクターが高い： $\delta \geq \frac{1}{2}$ ）プレイヤーであれば
 トリガー戦略にしたがうインセンティブをもつ

違法カルテル

ライバル企業同士がカルテルを結ぶことは違法行為
 ∴ 明示的な契約書を交わすことなく「暗黙の協調」を企てる

クールノー複占が無限回繰り返される状況で
 トリガー戦略プロファイルを考える

- 第1期、各企業は $\frac{1}{4}$ ずつ供給、独占価格 $\frac{1}{2}$ 成立
- 以降、独占価格が成立し続けるかぎり、各企業は $\frac{1}{4}$ ずつ供給
- 一度でも独占価格 $\frac{1}{2}$ が成立しなければ、以降 $\frac{1}{3}$ ずつ供給
 協調からクールノー均衡の繰り返しへ

カルテルにしたがうと： 每期 $(1 - \frac{1}{2})\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ の利潤

カルテルを破ると： 今期 $\max_x (1 - \frac{1}{4} - x)x = \frac{9}{64}$ ($x = \frac{3}{8}$)
 次期以降 $(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3})\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

カルテル成立条件： $\frac{1}{(1-\delta)8} \geq \frac{9}{64} + \frac{\delta}{(1-\delta)9} \quad \therefore \delta \geq \frac{9}{17}$

繰り返しゲームの分析：
経済組織や経済制度の理解に大きな貢献

信用と評判
企業文化
法制度ビジネス
村八分
スケープゴート
フォーク定理
.....

補論 1 : ゲーム理論と行動経済学

ゲーム理論のモデルを実験してみると
理論とは大きく乖離した実験結果が得られることがある

金銭的な利得以外の要因（心理的、倫理的）に
行動選択が左右されている

実験結果を参考にして
金銭的動機以外の要因を考慮したプレイヤーのモデルを開発
→ 行動ゲーム理論

例：最後通牒ゲーム（パートナーシップと交渉）

山田さんは**1000**万円のビジネスチャンスを発見した。
しかし村上さんと共同でないとビジネスを実行できない。
そこで山田さんは村上さんに
「**1000**万円のうち**X**万円を村上さんの分け前にするので協力してほしい」
と提案した。

村上さんは「受け入れる」か「拒否するか」を選択する。
拒否するとビジネスチャンスは消滅する。
受け入れると村上さんは**X**万円、山田さんは $(1000 - X)$ 万円獲得できる。

あなたが山田さんなら、**X**をいくりにする？
あなたが村上さんなら、いくら以上なら受け入れる？
二人が合理的ならばどのように行動する？

ゲーム理論による説明の一例：

概してプレイヤーは金銭的利益のみに関心があると仮定される

部分ゲーム完全均衡：

村上さんは $X > 0$ であれば必ず「受け入れる」
山田さんは $X \approx 0$ 円を提示し、村上さんはそれを受け入れる

これは実際の人間の行動を正しく記述するものだろうか？
ラボ実験してたしかめよう！

実験結果は理論とあまり整合的でないことがある

かなりの人が山田さんの立場において「50%に迫る X」を選択した
かなりの人が村上さんの立場において低い X に対して「拒否」を選択した

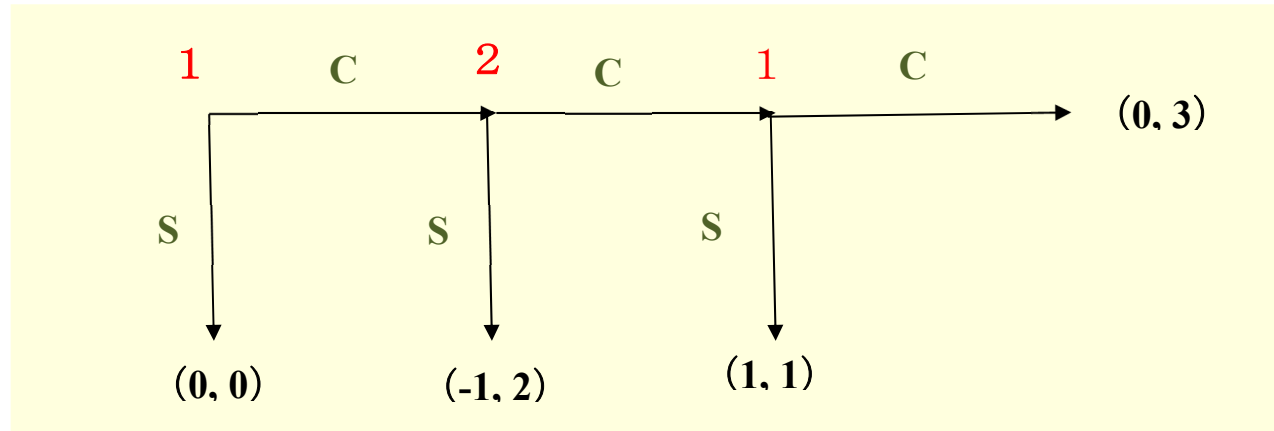
Think Why :

山田さんはからおどしにひっかかった？

村上さんは不平等を回避したかった（不平等回避：Inequality Aversion）？

村上さんは山田さんが低い X を提示したことに立腹した（**互惠性：Reciprocity**）！
「村上さんに X = 20% 以上はお渡しできない裏事情があります」 X = 20 を受け入れることに.....

補論 2 : 戦略とは
(徹底された) 「行動の計画」 のことである : 再考



プレイヤー 1 の戦略は 4 通り : $(S, S), (S, C), (C, S), (C, C)$

これは常識的な意味での行動計画 (3 通り) とは違う : $S, (C, S), (C, C)$

$(S, S), (S, C)$: 自分が S を最初に選択するにもかかわらず、本来の計画にはない「C を最初に選択した後のプレイヤー 1 の行動選択」を盛り込んでいる。Why?

∴ 「C を最初に選択した後のプレイヤー 1 の行動選択」は相手プレイヤー 2 が戦略 (S か C か) を決める際にはとても有用な情報である。Think Why

第 13 章終わり

宿題 (13) を提出すること

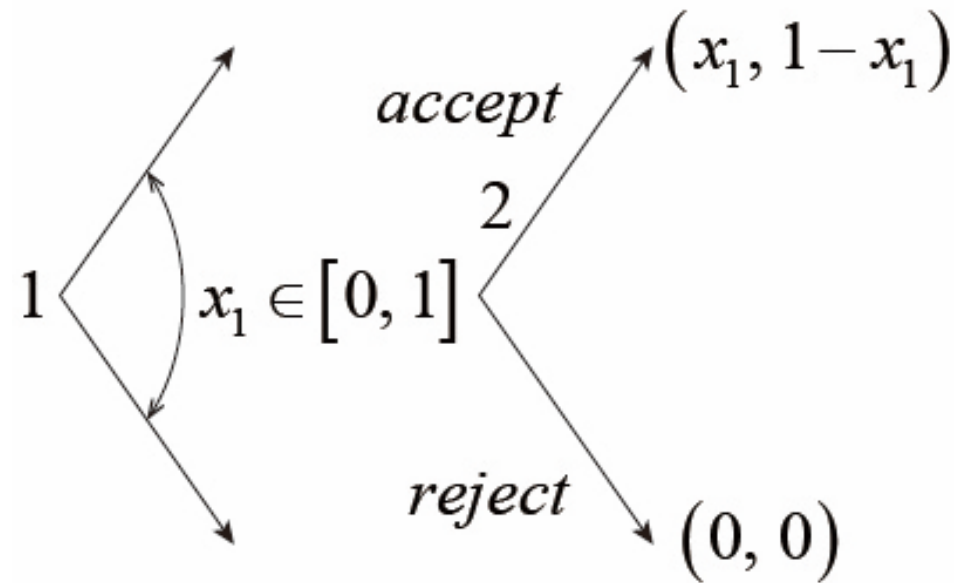
追記：部分ゲーム完全均衡の考え方に慣れよう
(時間がなければ省略します)

最後通牒ゲーム再検討： 逐次交渉ゲーム

理性的、合理的な交渉の手続きを考えよう

- ⇒ 最後通牒ゲーム： 先手の提案を後手が拒否すると交渉決裂(先手有利)
⇒ 逐次交渉ゲーム： 立場を入れ替えて再交渉
合意するまで再交渉を続けましょう
先手後手の有利不利の小さい環境で
どのような合意形成が可能か？
契約終結、立法の基礎理論に
- cf. Hawk-Dove Game**： 理性的でない交渉
有利不利の関係がナッシュ均衡になる

最後通牒ゲーム



部分ゲーム完全均衡： プレーヤー2は（プレーヤー1の取り分についての）
 提案 $x_1 \in [0, 1]$ に関係なく「Accept」
 プレーヤー1は $x_1 = 1$ を選択（cf. 行動ゲーム理論）

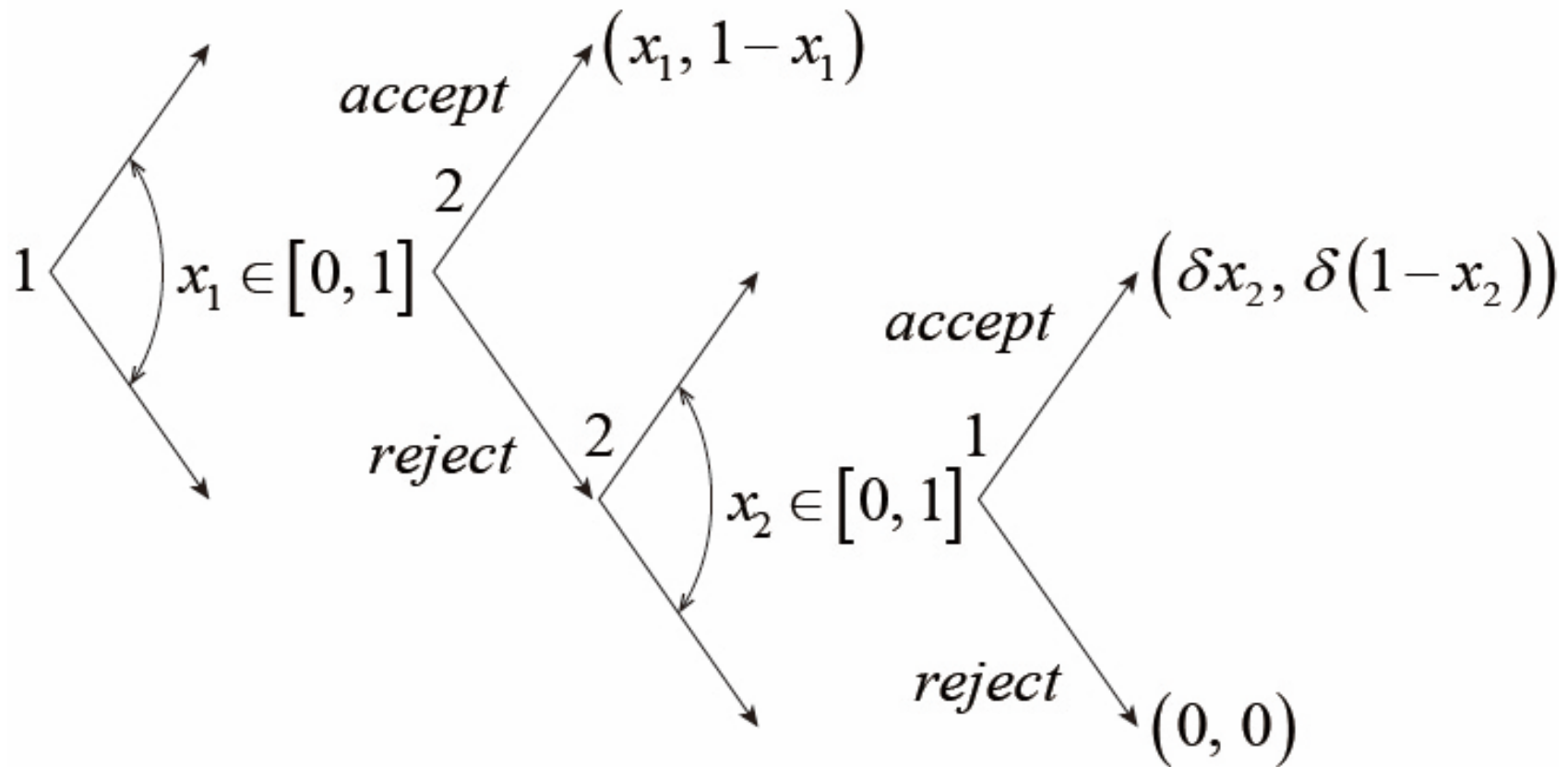
*本文では X を後手の取り分としていたが、ここでは x_k , $k = 1, 2, 3 \dots$ をプレーヤー1の取り分とする

2 段階逐次交渉

二人が交互に提案 (Alternating Offer)

合意が遅れると損失発生：割引ファクター $\delta \in (0,1)$, 時間選好

- Stage 1 :** 先手プレイヤー 1 : $x_1 \in [0,1]$ を提案
 後手プレイヤー 2 : 「Accept」 すると終了 利得ベクトル $(x_1, 1-x_1)$
 「Reject」 すると Stage 2 へ!
- Stage 2 :** 全利益が 1 から $\delta \in (0,1)$ へダウン (交渉長引くとコスト発生)
- 先手プレイヤー 2 : $x_2 \in [0,1]$ を提案 (最後通牒)
 後手プレイヤー 1 : 「Accept」 で終了 : 利得ベクトル
 $(\delta x_2, \delta(1-x_2))$
 「Reject」 で終了 : 利得ベクトル $(0,0)$



交渉を左右する二要因：

最後通牒（プレイヤー 2）

割引ファクター $\delta \in (0, 1)$ ：交渉が長引くとコスト

部分ゲーム完全均衡（後方帰納法で）

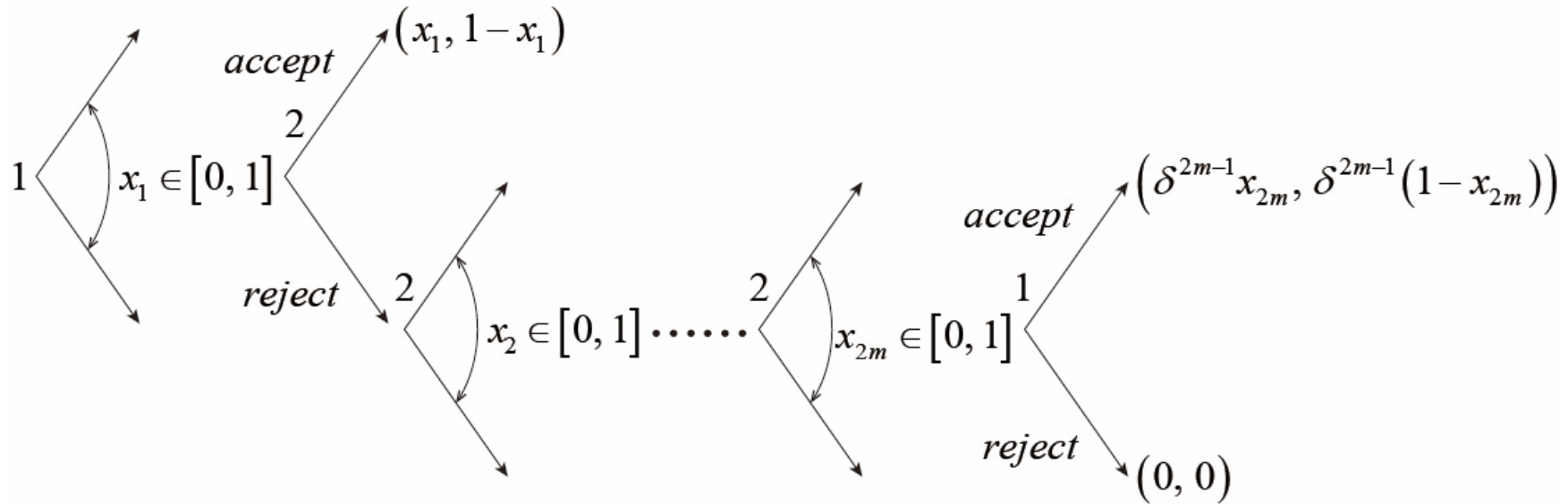
| | | | |
|-----------------|-----------|---|-------------------|
| Stage 2: | 後手プレイヤー 1 | すべての提案 $x_2 \in [0,1]$ を「Accept」: | Think why. |
| | 先手プレイヤー 2 | $x_2 = 0$ を選択: | Think why |
| | | \therefore 利得ベクトル $(0, \delta)$ | |
| Stage 1: | 後手プレイヤー 2 | $1 - x_1 \geq \delta$ を「Accept」: | Think why. |
| | | $1 - x_1 < \delta$ なら「Reject」して Stage2 へ: | Think why. |
| | 先手プレイヤー 1 | $x_1 = 1 - \delta$ を選択: | Think why. |

Stage 1 にて交渉成立：利得ベクトル $(1 - \delta, \delta)$ が実現

合理的なプレイヤー 1 は、交渉が長引くのを避けて、即合意できる提案をした

割引ファクター δ が高い（あまり割り引かれない）場合、プレイヤー 2 の最後通牒の効果が強いので、プレイヤー 2 に有利な合意になる

多段階 (2m) 逐次交渉



全部で $2m$ Stages:

割引ファクター $\delta \in (0, 1)$:

Stage $2m$ (final stage) にてプレイヤー 2 が最後通牒

Stage $t \in \{1, \dots, 2m\}$ における (総) 利益は δ^{t-1}

部分ゲーム完全均衡（後方帰納法で）

- Stage $2m$: 後手プレイヤー1 すべての提案 $x_{2m} \in [0,1]$ を「Accept」
 先手プレイヤー2 $x_2 = 0$ を選択
 利得ベクトル $(0, \delta^{2m-1})$
- Stage $2m-1$: 後手プレイヤー2 $1 - x_{2m-1} \geq \delta$ ($\delta^{2m-2}(1 - x_{2m-1}) \geq \delta^{2m-1}$) なら「Accept」
 $1 - x_{2m-1} < \delta$ なら「Reject」して Stage $2m$ へ
 先手プレイヤー1 $x_{2m-1} = 1 - \delta$ を選択
 利得ベクトル $(\delta^{2m-2} - \delta^{2m-1}, \delta^{2m-1})$
- Stage $2m-2$: 後手プレイヤー1 $x_{2m-2} \geq \delta(1 - \delta)$ ($\delta^{2m-3}x_{2m-2} \geq \delta^{2m-2}(1 - \delta)$) なら
 「Accept」
 $x_{2m-2} < \delta(1 - \delta)$ なら「Reject」して Stage $2m-1$ へ
 先手プレイヤー2 $x_{2m-2} = \delta(1 - \delta) = \delta - \delta^2$ を選択
 利得ベクトル $(\delta^{2m-2} - \delta^{2m-1}, \delta^{2m-3} - \delta^{2m-2} + \delta^{2m-1})$

以下同様にして、任意の $t \in \{1, \dots, m-1\}$ にて、

$$\text{Stage } 2t \quad x_{2t} = \delta - \delta^2 + \delta^3 - \dots - \delta^{2m-2t}$$

$$\text{Stage } 2t-1 \quad x_{2t-1} = 1 - \delta + \delta^2 - \dots - \delta^{2m-2t+1}$$

よって

$$\begin{aligned} \text{Stage } 1 \quad x_1 &= 1 - \delta + \delta^2 - \dots - \delta^{2m-1} \\ &= (1 + \delta^2 + \dots + \delta^{2(m-1)}) - \delta(1 + \delta^2 + \dots + \delta^{2(m-1)}) \\ &= (1 - \delta) \frac{1 - \delta^{2m}}{1 - \delta^2} = \frac{1 - \delta^{2m}}{1 + \delta} \end{aligned}$$

Stage 1 にて即交渉成立

プレイヤー 1 が $x_1 = \frac{1 - \delta^{2m}}{1 + \delta}$ 、プレイヤー 2 が $1 - x_1 = \frac{\delta + \delta^{2m}}{1 + \delta}$ を獲得

$m \rightarrow \infty$:

最後通牒 (final stage の効果) を消すと...

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_1(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - \delta^{2m}}{1 + \delta} = \frac{1}{1 + \delta}$$

$$1 - \lim_{m \rightarrow \infty} x_1(m) = 1 - \frac{1}{1 + \delta} = \frac{\delta}{1 + \delta} \quad \left(< \frac{1}{1 + \delta} \right)$$

Stage1 の先手が有利、しかし.....

摩擦のない再交渉（交渉継続のコストほぼゼロ）：

交渉決裂しても即再交渉開始できると仮定すると（ $\delta \uparrow 1$ ）

$$\lim_{\delta \uparrow 1} \lim_{m \rightarrow \infty} x_1(m, \delta) = \lim_{\delta \uparrow 1} \frac{1}{1 + \delta} = \frac{1}{2}$$

最後通牒や割引ファクターによる交渉プロセスの制約がない場合
合理的なプレイヤーは一意的な部分ゲーム完全均衡の結果として

「平等な分配」

に合意

「フェアな交渉手続きなら分配もフェア」

(やや上級) 無限階逐次交渉

交渉を無限に継続できると仮定

永遠に **Reject** し続けた場合の 利得ベクトルは $(0, 0)$

以下の純粋戦略プロファイルを考えよう：

奇数ステージ $t \in \{1, 3, 5, \dots\}$ にて：

プレイヤー 1 は常に $x_t = \frac{1}{1+\delta}$ (1 の取り分) を提示

プレイヤー 2 は提示が $\frac{1}{1+\delta}$ 以下ならばその時のみ **Accept**

偶数ステージ $t = \{2, 4, 6, \dots\}$ にて：

プレイヤー 2 は常に $x_t = \frac{\delta}{1+\delta}$ (1 の取り分) を提示

プレイヤー 1 は 提示が $\frac{\delta}{1+\delta}$ 以上ならばその時のみ **Accept**

この時ステージ 1 にてプレイヤー 1 は $\frac{1}{1+\delta}$ を提示しプレイヤー 2 は即 **Accept**

これは部分ゲーム完全均衡になっている

- 奇数ステージ：
- プレーヤー1は $\frac{1}{1+\delta}$ より低い提示をすると **Accept** されるが明らかに損
 - プレーヤー1は $\frac{1}{1+\delta}$ より高い提示をすると **Reject** され明らかに損
 - プレーヤー2は $1 - \frac{1}{1+\delta} = \frac{\delta}{1+\delta}$ 以上の分け前を **Reject** すると次期に $1 - \frac{\delta}{1+\delta} = \frac{1}{1+\delta}$ を獲得するが δ で割り引くので損
 - プレーヤー2は $1 - \frac{1}{1+\delta} = \frac{\delta}{1+\delta}$ 未満の分け前を **Accept** すると次期に $1 - \frac{\delta}{1+\delta} = \frac{1}{1+\delta}$ を獲得する機会を失うので δ で割り引いても損

- 偶数ステージ：
- プレーヤー2は $\frac{\delta}{1+\delta}$ より高い提示をすると **Accept** されるが明らかに損
 - プレーヤー2は $\frac{\delta}{1+\delta}$ より低い提示をすると **Reject** され明らかに損
 - プレーヤー1は $\frac{\delta}{1+\delta}$ 以上の分け前を **Reject** すると次期に $\frac{1}{1+\delta}$ を獲得するが δ で割り引くので損
 - プレーヤー1は $\frac{\delta}{1+\delta}$ 未満の分け前を **Accept** すると次期に $\frac{1}{1+\delta}$ を獲得する機会を失うので δ で割り引いても損

$(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta})$ は部分ゲーム完全均衡によって達成できる「唯一の」利得ベクトル

- プレーヤー1 から始まるゲームの部分ゲーム完全均衡において達成できるプレーヤー1の利得の上限を \bar{v}_1 , 下限を \underline{v}_1 とする
- プレーヤー2 から始まるゲームの部分ゲーム完全均衡において達成できるプレーヤー2の利得の上限を \bar{v}_2 , 下限を \underline{v}_2 とする
- モデルは対称だから $(\bar{v}_2, \underline{v}_2) = (\bar{v}_1, \underline{v}_1)$ 成立。以下、 (\bar{v}, \underline{v}) と記す
- ステージ1にてプレーヤー1の提案はプレーヤー2に最低限 $\delta \underline{v}$ を与える
つまり、 $1 - \delta \underline{v}$ 以上のプレーヤー1の利得は均衡にならず
- ∴ $\bar{v} \leq 1 - \delta \underline{v}$ つまり $(1 - \delta) \bar{v} \leq 1 - \delta \bar{v} - \delta \underline{v}$
- プレーヤー1の提案は、プレーヤー2に $\delta \bar{v}$ を保証すれば必ず Accept
つまり、 $1 - \delta \bar{v}$ 以下のプレーヤー1の利得は均衡にならず
- ∴ $\underline{v} \geq 1 - \delta \bar{v}$ つまり $(1 - \delta) \underline{v} \geq 1 - \delta \bar{v} - \delta \underline{v}$
- ∴ $(1 - \delta) \bar{v} \leq 1 - \delta \bar{v} - \delta \underline{v} \leq (1 - \delta) \underline{v}$. $\bar{v} \geq \underline{v}$ より $\bar{v} = \underline{v} = \frac{1}{1 + \delta}$ 成立! Q.E.D.