

2024年1月15日

第15章：社会的選択理論

Social Choice Theory

Osborne and Rubinstein “Models in Microeconomic Theory” Chapter 20

社会的選択：

経済的決定（配分、市場）

政治的決定（代議士、選挙）

分権的決定、集権的決定

社会的選択の「ルール」を定める

社会的選択の「目標」を定める

社会的選択の合理性：

社会的選択の公理化問題

15.1. 社会的選択と社会的選好 Social Choice and Social Preference

「個人の選択」再考（意思決定, 第 10 章）

個人の選択肢全体集合	X
個人の選択肢集合	$B \subset X$
選択ルール	$C : 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X, C(B) \in B$ 経済問題：何を購入するか、何を生産するか 政治問題：誰に投票するか
選好	$\succeq_i, u_i : X \rightarrow R$
選択ルールと選好の関係	$u_i(C(B)) \geq u_i(x) \text{ for all } x \in B$

社会的選択

社会状態全体集合

Ω , 任意の社会状態 $\omega \in \Omega$

社会状態 ω とは? :

社会に関わる様々な情報

誰がどのような選好を持っているか
誰がどのような能力をもっているか
誰がどの程度貧困か,

.....

社会的選択

(個人の選択のアナロジー)

社会の選択肢全体集合 $X, x \in X$

社会の選択肢集合 $B \subset X$

経済問題：どのように資源配分を決めるか
政治問題：誰を代議士に選ぶか

社会的選択ルール $C : 2^X \setminus \{\emptyset\} \times \Omega \rightarrow X$
 $C(B, \omega) \in B$

社会的選択は社会状態に依存しうる

社会状態 $\omega \in \Omega$ においては $C(B, \omega) \in B$ を社会的に選択する

別の社会状態 $\omega' \in \Omega$ においては $C(B, \omega') \in B$ を社会的に選択する

$$C(B, \omega) \neq C(B, \omega')$$

例：センの笛
(Amartya Sen, Nobel Winner 1998)

1本の笛を三人の子供 (A, B, C) の誰に与えればいいのか

A は一番貧しい

B は笛が一番上手 (笛を楽しめる)

C は笛の作り主

平等主義：	A	貧困度を個人間比較
功利主義：	B	効用を個人間比較
自由主義：	C	既得権を尊重 (個人間比較なし)

どの主張が優先されるか？： 社会状態 (の詳細) に依存：
 例えば A の貧困度はさほど酷くはない
 B は凄くうまいわけではない
 → C !

社会的選好

すなわち あるいは $u: X \times \Omega \rightarrow R$

$$u(x, \omega) > u(y, \omega)$$

社会状態 $\omega \in \Omega$ においては
 x の方が y よりも社会的に選好される

$$u(y, \omega') > u(x, \omega')$$

別の社会状態 $\omega' \in \Omega$ においては
 y の方が x よりも社会的に選好される

社会的選好の考え方

二つの視点（分析者の立場） 社会厚生 vs 社会的集計

社会厚生： 社会状態 ω においては $u(x, \omega)$ の大小によって
各選択肢 $x \in X$ の社会厚生の良悪が評価される
例：総余剰、所得分配の公平性指標、.....

* 社会状態間の比較も考慮できる（空想として..）：

$$u(x, \omega) > u(y, \omega')$$

社会状態 $\omega \in \Omega$ における x の方が
別の社会状態 $\omega' \in \Omega$ における y よりも
社会的に選好される

社会的集計： 社会状態の詳細ではなく
個人の選好に関する情報 $(\succsim_i)_{i \in N}$ だけを考慮する
個人の選好を集計して社会的選好を導く

なぜ個人の選好だけを考慮するのか？

個人間を比較する基準には客観性がない
個人の選好情報以外の情報を集めるのは困難
「センの笛のストーリーは絵空事」

社会的選択ルール C の様々なとらえ方

- 社会的選択の目標： 状態 ω においては
 選択肢集合 $B \subset X$ の中で
 $C(B, \omega)$ が社会的に望ましい
- 社会的選好 u から導かれる： 選択肢集合 $B \subset X$ の中で
 社会的選好のトップランクが
 社会的に選択されるべきである
 $u(C(B, \omega), \omega) \geq u(x, \omega)$ for all $x \in B$

あるいは

- 投票ルール： 個人の投票行動から社会的選択を導く
 特定のルール（制度、手続き）を記述
 している

以下より社会的選択ルールを「投票ルール」として考察しよう！

代表的な投票ルール

多数決ルール (Majority)

選択肢二つ：X、Y

投票者はXかYに投票する

得票数の多い選択肢が選ばれる

選択肢が二つの場合は

多数決ルールは（それなりに）説得力をもつ

ただし...

cf. 上田さんと石川さんはXをYより少し好む。田口さんはYをXより非常に！！好む。
この場合にはX（多数決）でなくYの方がいいのでは...

選択肢が三つ以上の場合の 代表的な投票ルール

大多数（多数決）ルール

ボルダルルール

コンドルセ勝者

いずれにもメリット、デメリットあり

15.2. 投票ルールのパフォーマンス

例 1 : 候補者 X、Y、Z、W
4 3 人の投票者

5 人	1 0 人	1 4 人	1 4 人
X	X	Y	Z
Y	Z	W	Y
Z	Y	Z	W
W	W	X	X

候補者 X、Y、Z、W のうちだれを選べばいいか？

多数決ルール（大多数、Plurality）

各投票者に一番好きな候補者を表明させる
 一番得票の多い候補者を選ぶ（過半数を超えなくてもよい）

	5人	10人	14人	14人
X	X	X	Y	Z
Y	Y	Z	W	Y
Z	Z	Y	Z	W
W	W	W	X	X

X 15人

Y 14人

Z 14人

W 0人

Xが選ばれる！

コンドルセ勝者

各投票者に選好そのものを表明させる

1対1で「多数決ルール」にもとづいて総当たり戦

	5人	10人	14人	14人
X	X	X	Y	Z
Y	Y	Z	W	Y
Z	Z	Y	Z	W
W	W	W	X	X

X vs Z : 15 : 28で **Z**

Y vs Z : 19 : 24で **Z**

Z vs W : 29 : 14で **Z**

Zはコンドルセ勝者（一対一の多数決で常に勝つ）

Zが選ばれる！

ボルダルール（準満場一致ルール）

各投票者に選好そのものを表明させる

候補者ごとに「満場一致からどの程度かけ離れているか（ボルダ得点）」を計算する

	5人	10人	14人	14人
	X	X	Y	Z
	Y	Z	W	Y
	Z	Y	Z	W
	W	W	X	X
X	$(1-1) \times 5 + (1-1) \times 10 + (4-1) \times 14 + (4-1) \times 14 = 84$			
Y	$(2-1) \times 5 + (3-1) \times 10 + (1-1) \times 14 + (2-1) \times 14 = 39$			
Z	48			
W	87			

Yが一番満場一致に近い ($Y \succ Z \succ X \succ W$)

Yが選ばれる！

投票ルールごとに選ばれる候補者が異なる
(X、Y、Z それぞれに捨てがたい魅力がある)

投票がフェアであるためには
常に同じ投票ルールが使われるべき

悪い例： 特定の選挙人が投票ルールを裁量的に決める：
Xを一押ししたい時は 大多数ルール
Yを一押ししたい時は ボルダルール
Zを一押ししたい時は 総当たり戦 (コンドルセ勝者)

15.3. 投票ルールの問題点

各投票ルールはそれぞれ欠点をもっている

欠点の少ない投票ルールが望まれる

しかしその判断は容易でない.....

15.3.1. ボルダールールの問題点

無関係な選択肢からの非独立性

例 1 再考：

	5 人	10 人	14 人	14 人
X	X	X	Y	Z
Y	Y	Z	W	Y
Z	Z	Y	Z	W
W	W	W	X	X

W は Y よりも全員に嫌われている

W を除いてボルダ得点を再度計算してみよう

$$X \quad 2 \times 14 + 2 \times 14 = 56$$

$$Y \quad 1 \times 5 + 2 \times 10 + 1 \times 14 = 39$$

$$Z \quad 10 + 10 + 14 = 34$$

Y ではなく Z (コンドルセ勝者と同じ人) が選ばれる ($Z \succ Y \succ X$)

W を入れることで Z の見栄えを悪くしていた

15.3.2. コンドルセ・パラドックス

非推移性

(コンドルセ勝者が存在しないケースがある)

例 2 :

A さん	B さん	C さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

XはYに勝つ；YはZに勝つ；XはZに負ける
総当たり戦では決着がつかない

トーナメント形式にすることで決着

例えば「XとYの勝者がZと対戦」で決着

トーナメントの組み方によって結果が変わってしまう.....

15.3.3. インセンティブ問題

A さん	B さん	C さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

コンドルセ勝者いない, ボルダ得点おなじ, 大多数いない
誰かの意見に従おう (たとえば A さん \Rightarrow X を選択)

このような状況では
誰か別の人 (B さん) が
嘘の投票をするインセンティブをもつ恐れがある

A さん	B さん	C さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y
	↓	
A さん	B さん	C さん
X	Z	Z
Y	Y	X
Z	X	Y

B が嘘をつくことによって
Z がコンドルセ勝者、大多数、ボルダ最小得点 (2 点) になる
B にとって得

15.3.4. 単峰性 (Single-Peakedness) とその限界

A さん	B さん	C さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

コンドルセ勝者いない、ボルダ得点おなじ、大多数いない

「選挙の焦点は国防」を強調

X 国防強化 ; Y 現状維持 ; Z 縮小

この場合 C さんの選好は不自然になる : 単峰性 ZYX に変更へ

A さん	B さん	C さん
X	Y	Z
Y	Z	Y
Z	X	X

コンドルセ勝者 Y ボルダ最小得点 Y !

現実の多くの社会的選択問題の論点において
単峰性は成立している
(あなたは右派？左派？中庸？)

しかし

複数の論点から誰に投票するかを判断する必要がある場合には
単峰性は当てはまらない：

別の論点（コロナ対策、環境問題、少子化問題など）が棚上げに

15.4. アローの不可能性定理

Kenneth Arrow (Nobel winner 1972) による
「理想的な民主主義」

あらかじめ社会的集計としての社会的選好

$$\succsim \equiv \succsim \left((\succsim_i)_{i \in N} \right)$$

が適切に設定（憲法制定のアナロジー）

社会的選好から社会的選択が随時導かれる

適切に設定された社会的選好 $\succsim \equiv \succsim ((\succsim_i)_{i \in N})$ は以下の三つの条件（公理）をみたすものでなければならない

公理 1（パレート性）

公理 2（無関係な選択肢からの独立性：IIA）

公理 3（非独裁制）

アローの不可能性定理

選択肢全体集合が $|X| \geq 3$ の時

公理 1、2、3 をみたす社会的選好は存在しない
（アロー的「民主主義の理想」は存在しない）

公理 1 (パレート性) :

任意の $(\succsim_i)_{i \in N}$ について、

$$[x \succsim_i y \text{ for all } i \in N] \Rightarrow [x \succsim y]$$

全員が y より x を選好するならば、社会的にも y より x が選好される

公理 2 (無関係な選択枝からの独立性 : IIA) :

任意の $(\succsim_i)_{i \in N}$ 、 $(\triangleright_i)_{i \in N}$ について、

$$\begin{aligned} & [[x \succsim_i y] \Leftrightarrow [x \triangleright_i y] \text{ for all } i \in N] \\ \Rightarrow & [[x \succsim y] \Leftrightarrow [x \triangleright y]] \end{aligned}$$

任意の二種類の個人選好プロファイル $(\succsim_i)_{i \in N}$ 、 $(\triangleright_i)_{i \in N}$ を考える

選択枝 x と y については、どちらのプロファイルにおいても、各個人 $i \in N$ の選好は同じであるとする

$$[x \succsim_i y] \Leftrightarrow [x \triangleright_i y]$$

ならば選択枝 x と y についての社会的選好も同じになる (他の選択枝に影響されない)

$$[x \succsim y] \Leftrightarrow [x \triangleright y]$$

公理 3 (非独裁制) :

以下をみたす $i \in N$ は存在しない :

任意の $(\succsim_i)_{i \in N}$ について、

$$[x \succsim_i y] \Rightarrow [x \succsim y]$$

独裁者 i の選好がそのまま社会的選好になるようなケースを排除する

公理1 (パレート性) と公理3 (非独裁制) については
あまり文句のつけようのない要求と言えるかもしれない
しかし

公理2 (IIA, Independence of Irrelevant Alternative) については
やや議論の余地がある

公理2 は個人の好き嫌いの程度や個人間比較を排除する
⇒ 例えば「ボルダールール」を排除している

$B = X$ としてボルダ得点を計算すると公理2 をみたさない
ボルダ得点では、個人の好き嫌いの程度や個人間比較
(満場一致からどれほど離れているか、だれがより離れているか)
が加味される

アローは
「理想的な」民主主義にとって好き嫌いの程度や個人間比較は
本質的でないと考えたようだ

アローの不可能性定理：
選択肢全体集合が $|X| \geq 3$ の時
公理 1、2、3 をみたす社会的選好は存在しない

三つの公理は、ある程度は納得できそうな要求ばかりである
しかしそれらすべてが一度にみたされるわけではない

三つの要求はトレードオフの関係に

証明：松島（経セミ）を参照のこと。

ここでは証明の一部を紹介しよう

単純化のため以下の公理を追加（実際の証明には不要）

公理 4（中立性）：選択肢のラベリングからの独立性

任意の $(\succsim_i)_{i \in N}$ 、 $(\triangleright_i)_{i \in N}$ 、任意の one-to-one mapping $\mu: X \rightarrow X$ について、

$$\begin{aligned} & [[x \succsim_i y] \Leftrightarrow [\mu(x) \triangleright_i \mu(y)]] \text{ for all } x \in X, y \in X, \text{ and } i \in N \\ \Rightarrow & [[x \succsim y] \Leftrightarrow [\mu(x) \triangleright \mu(y)]] \end{aligned}$$

各個人の選好 $(x \succsim_i y \text{ or } y \succsim_i x)$ が

別の各個人の選好を選択肢変換したもの $(\mu(x) \triangleright_i \mu(y) \text{ or } \mu(y) \triangleright_i \mu(x))$ と

同じであるならば

もとの社会的選好 $(x \succsim y \text{ or } y \succsim x)$ と

あとの社会的選好を μ -選択肢変換したもの $(\mu(x) \triangleright \mu(y) \text{ or } \mu(y) \triangleright \mu(x))$

は同じになる

(リラベリングからの普遍性)

公理 4 (中立性) : 例による解説

A さん	B さん	C さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

A さんの意見に従おう！ ⇒ X を選択

公理 4 (中立性) 下では、同じような仕方で意見が割れるといつも A さんの意見で決めることになる

C さん	A さん	B さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

やはり A さんの意見に従おう！ ⇒ Y を選択

B さん	C さん	A さん
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

やはり A さんの意見に従おう！ ⇒ Z を選択

さらに公理1 (パレート), 公理2 (IIA) が加わると.....

「いっそのこと、どんなケースでも A さんに決めてもらいましょう」
というルールが成立してしまう

「A さんだけが x を一押し、他の人はみな x を最低ランク」
⇒ X が選ばれてしまう
A さんは独裁者だ!

アローの不可能性定理：証明のエッセンス

ピヴォタル投票者 i^* の存在（公理 2 (IIA) を使って）

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>n</u>	
x	x	x	x	→ $x \succsim y$ (公理 1 (パレート) より)
y	y	y	y	

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>n</u>	
y	x	x	x	→ $x \succsim y$
x	y	y	y	

左から一人ずつ x と y の個人の順位をひっくり返していくと
 ある $i = i^*$ (ピヴォタル投票者) が存在して $x \succsim y$ から $y \succsim x$ に
 社会的順位がひっくり返る

1	2	3 i*-1	i* n
y	y	y y	x X
x	x	x X	y y

(ここで逆転)

1	2	3	i*	i*+1 n
y	y	y	y	x X
x	x	x	X	y y

→ **$x \succsim y$**

→ **$y \succsim x$**

公理 4 (中立性) より

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>i^*-1</u>	<u>i^*</u>	<u>i^*+1</u>	<u>n</u>	
y	y	y	y	x	z	z	→
z	z	z	z	y	x	x	
x	x	x	x	z	y	y	

$x \succsim y, y \succsim z$

社会的選好の推移性より → $x \succ z$

∴ ピヴォタル i^* だけが x を z よりも選好している
 にもかかわらず
 x が z よりも社会的に選好されてしまう.....

宿題 (15) を提出すること