2012 年 12 月 28 日

経済セミナー **2013 年 2, 3 月号**

「オークションとマーケットデザイン」第 **4** 回

不完備情報ゲーム、ベイジアンゲーム、メカニズムデザイン

松島斉

東京大学経済学研究科教授

今回より、オークション理論の解説が本格的にスタートする。まずは、オークション理論の学習に必要となる分析道具である、不完備情報ゲーム、ベイジアンゲーム、メカニズムデザインの基礎を解説したい。

1. 標準形ゲームとナッシュ均衡

非協力ゲームは、任意に与えられた社会状態（State）における複数経済主体の戦略的相互依存関係を、「標準形ゲーム（Normal Form Game）」と呼ばれる表現形式によって定式化する[1]。標準形ゲームは、プレーヤー全体の集合 N （プレーヤー集合）、各プレーヤー $i \in N$ が選択できる行動全体の集合 M_i（行動集合）、および各プレーヤー $i \in N$ の利得（効用）関数 $u_i : M \to R$ によって定義される。$M \equiv \underset{i \in N}{\times} M_i$ は、全プレーヤーが選択しうる行動プロファイル全体の集合（行動プ

[1] 非協力ゲームには、標準形ゲーム以外に、経済主体が異時点間で意思決定する状況を明示的に扱う「展開形ゲーム」という表現形式がある。また、この連載は、「協力ゲーム」も扱うことがある。これらは、必要に応じて、今後解説される予定である。

ロファイル集合）である。各プレーヤー$i \in N$が行動$m_i \in M_i$を選択する場合、すなわち行動プロファイル$m \equiv (m_i)_{i \in N} \in M$が選択される場合、各プレーヤー$i \in N$の利得は$u_i(m) \in R$で与えられる。プレーヤー集合、行動集合、利得関数という「三種の神器」によって定義される標準形ゲームは、

$$G = (N, M, u)$$

と表わされることとなる。$u \equiv (u_i)_{i \in N}$は、標準形ゲームにおける利得関数プロファイルである。今後、断りのない限り、Nを有限集合、$n \equiv |N| \geq 2$をプレーヤーの人数、$N = \{1, 2, ..., n\}$とする。

各プレーヤーの行動選択の目的は、自身の利得をなるべく高くすることにある。この目的と整合的な行動選択がなにかについては、何らかの均衡概念によって厳密に定義される必要がある。留意すべきは、各プレーヤー$i \in N$の利得$u_i(m)$は、自身の行動選択m_iのみならず、他のプレーヤーの行動プロファイルの選択$m_{-i} \equiv (m_j)_{j \in N \setminus \{i\}} \in M_{-i} \equiv \underset{j \in N \setminus \{i\}}{\times} M_j$にも依存しうることである。そのため、どの行動選択が自身にとって最適であるかは、他のプレーヤーがどの行動を選択するかに依存しうる。

「ナッシュ均衡（Nash Equilibrium）」は、このような戦略的相互依存関係の特性を明示的に扱うための、標準形ゲームの代表的な均衡概念である[2]。任意の行動プロファイル$m = (m_i, m_{-i}) \in M$は、以下の条件をみたす時、ナッシュ均衡であると定義される。つまり、任意のプレーヤー$i \in N$について、他のプレーヤーがm_{-i}を選択する限りにおいて、行動選択m_iは自身の利得を最大化する、すなわち、

$$u_i(m) \geq u_i(m_i', m_{-i}) \quad \text{for all} \quad i \in N \quad \text{and} \quad m_i' \in M_i$$

が成立する。ナッシュ均衡とは、全てのプレーヤーについて、他のプレーヤーがナッシュ均衡をプレイする限りにおいて、自身もナッシュ均衡にしたがうこ

[2] ナッシュ均衡を概念化したジョン・ナッシュ（John Nash）の主要論文は、Kuhn and Nasar (2002) に収録されている。

とが自身の利得を最大化する、つまり「最適反応（Best Response）」になる、行動プロファイルのことである。

ナッシュ均衡は、より一般的には、混合戦略（確率的選択）のプロファイルについて定義されるが、この連載では、断りのない限り、純粋戦略（確率的選択をみとめない）の範囲内でナッシュ均衡が存在するケースのみを考察する。

2. 不完備情報ゲーム

標準形ゲームでは、任意の社会状態における戦略的相互依存関係が、他の社会状態とは独立に分析される。そのため、経済主体は真の社会状態について熟知している、すなわち「完備情報（Complete Information）」であることが暗黙に仮定される。

それに対して、「不完備情報ゲーム（Incomplete Information Game）」は、真の社会状態がどれであるかについて不確実である状況を明示的に扱う。特に、情報が散在し、各プレーヤーが真の社会状態について断片的な私的情報をもつ「情報の非対称性（Asymmetric Information）」の状況を扱うことができる。

考察されるべき社会状態全体の集合（状態集合）をΩとする。任意の社会状態$\omega \in \Omega$ごとに標準形ゲーム$G = G(\omega)$が定義される。一般的には、社会状態に応じて、プレーヤー集合、行動集合、利得関数のいずれもが異なり得る。しかし、この連載は、断りのない限り、どの社会状態においても、プレーヤー集合Nと行動集合M_iについては共通であるが、利得関数プロファイルは社会状態に依存しうると仮定する。よって、利得関数を$u_i = u_i(\cdot, \omega)$と表すことで、任意の社会状態$\omega \in \Omega$における標準形ゲームは

$$G(\omega) = (N, M, (u_i(\cdot, \omega))_{i \in N})$$

とされる。

各プレーヤーiは社会状態ωについて私的情報ω_iを持っている。私的情報ω_iは、状態集合Ωの非空の部分集合と定義される。各プレーヤーiは、真の社会状

態がω_iに属することを知っている。しかし、ω_iの中のどの社会状態かは知らない。よって、ことなるプレーヤーの私的情報には共通部分があり、真の社会状態は共通部分に属していることになる。すなわち、真の社会状態が$\omega \in \Omega$で、各プレーヤーiの私的情報が$\omega_i \subset \Omega$である場合、

$$\omega \in \bigcap_{i \in N} \omega_i$$

が必ず成立する。

この連載は、社会状態の定義をより特定して、

$$\Omega \equiv \underset{i \in N}{\times} \Omega_i$$

とし、各プレーヤーの私的情報をそのプレーヤーの「タイプ（Type）」と呼ぶことにする。Ω_iは各プレーヤーiの可能なタイプω_i全体の集合（タイプ集合）である。社会状態は全プレーヤーのタイププロファイルによってあまねく記述される、つまり$\omega \equiv (\omega_i)_{i \in N}$とする。

以上より、不完備情報ゲームは、プレーヤー集合N、行動集合M_i、タイプ集合Ω_i、社会状態に依存した利得関数$u_i(\cdot, \omega)$の組み合わせとして、

$$\Gamma = (N, M, (\Omega_i, u_i(\cdot, \omega))_{i \in N})$$

と定義される。状態集合は$\Omega \equiv \underset{i \in N}{\times} \Omega_i$で与えられる。

不完備情報ゲームΓにおける各プレーヤーiの「戦略（Strategy）」は、$s_i : \Omega_i \to M_i$と定義される。プレーヤーiは、タイプω_iであるならば、行動$s_i(\omega_i) \in M_i$を選択する。タイプがことなれば、選択する行動もことなりうる。注意すべきは、各プレーヤーの行動選択は他のプレーヤーのタイプに依存しないことである。プレーヤーiの戦略集合をS_i、戦略プロファイルを$s \equiv (s_i)_{i \in N}$とする。戦略プロファイル全体の集合を$S \equiv \underset{i \in N}{\times} S_i$とする。

3. 優位戦略、事後均衡

不完備情報ゲームにおける代表的な均衡概念は、優位戦略（Dominant Strategy）と事後均衡（Ex Post Equilibrium）である。

任意のプレーヤー$i \in N$について、戦略$s_i \in S_i$が不完備情報ゲームΓにおける優位戦略であるとは、どの社会状態$\omega = (\omega_i, \omega_{-i}) \in \Omega$においても、また、他のプレーヤーがどの行動プロファイル$m_{-i} \in M_{-i}$を選択しようとも、行動$s_i(\omega_i) \in M_i$を選択することが自身の利得を最大にすることを意味する。すなわち

$$u_i(s_i(\omega_i), m_{-i}, \omega) \geq u_i(m_i, m_{-i}, \omega) \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega \quad \text{and all} \quad m \in M$$

をみたす戦略s_iをプレーヤーiの優位戦略と呼ぶ。$\omega_{-i} \equiv (\omega_j)_{j \neq i} \in \Omega_{-i} \equiv \underset{j \neq i}{\times} \Omega_j$は、他のプレーヤーのタイププロファイルである。

プレーヤーiについて優位戦略s_iが存在する場合、他のプレーヤーのタイププロファイルω_{-i}と行動プロファイルm_{-i}にかかわらず、行動選択$s_i(\omega_i)$は常に利得を最大化している。一般的には、不完備情報ゲームにおいて優位戦略が存在するとは限らない。ただし、オークションおよびメカニズムデザインでは、後述する「私的価値（Private Values）」と呼ばれる仮定の下で、グローブスメカニズム（Groves Mechanism）と称される、優位戦略の存在が保証されている重要なケースが集中的に考察される。

次に、戦略プロファイル$s = (s_i, s_{-i}) \in S$が不完備情報ゲームΓにおける事後均衡であるとは、任意のプレーヤーiについて、他のプレーヤーがs_{-i}にしたがって行動選択する限りにおいては、どの社会状態$\omega = (\omega_i, \omega_{-i}) \in \Omega$においても、行動$s_i(\omega_i) \in M_i$を選択することが自身の利得を最大にすることを意味する。すなわち、任意のプレーヤーiについて、

$$u_i(s(\omega), \omega) \geq u_i(m_i, s_{-i}(\omega_{-i}), \omega) \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega \quad \text{and all} \quad m_i \in M_i$$

がみたされる戦略プロファイルsを事後均衡であると定義する。ここで、$s_{-i} \equiv (s_j)_{j \neq i}$、$s(\omega) \equiv (s_i(\omega_i))_{i \in N}$，$s_{-i}(\omega) \equiv (s_j(\omega_j))_{j \neq i}$である。

戦略プロファイルsが事後均衡であることは、任意の社会状態$\omega \in \Omega$において、行動プロファイル$s(\omega) = (s_i(\omega_i))_{i \in N}$が標準形ゲームにおけるナッシュ均衡で

あることと同値である。注意すべきは、各プレーヤーの行動選択 $s_i(\omega_i)$ は社会状態 ω ではなく自身のタイプ ω_i にのみ依存することである。そのため、事後均衡は、ナッシュ均衡よりも制約の強い均衡概念になる。一般的に、不完備情報ゲームにおいて事後均衡が存在するとは限らない。もっとも、定義から明らかなように、優位戦略の方が事後均衡よりも制約の強い均衡概念である。つまり、戦略プロファイル $s \in S$ が優位戦略のプロファイルであるならば、それは自動的に事後均衡になる。ただし、後述する私的価値の仮定下では、このふたつの均衡概念は実質的に同値になり、区別する必要はなくなる。

4. ベイジアンゲーム

優位戦略あるいは事後均衡は、他のプレーヤーのタイプに無関係に最適な行動選択が存在することを要求する均衡概念である。しかしながら、この要求は制約が強いので、不完備情報ゲームにおいて優位戦略や事後均衡が存在するとは限らない。よって、より一般的な不完備情報ゲームにおいて、プレーヤーがどのように行動選択するかを均衡分析するには、各プレーヤーが他のプレーヤーのタイプをどのように予想しているかを、すなわち各プレーヤーの「信念（Belief）」を、明示的にモデルに組み入れることが必要になる。

各プレーヤーの信念とは、他のプレーヤーのタイプについての予想を確率によって表現したものである。各プレーヤーのタイプには、利得関数プロファイルについての情報のみならず、他のプレーヤーのタイプについての情報も含まれることがある。そのため、各プレーヤー $i \in N$ の信念は、一般的に、各タイプ ω_i の条件付き確率として、 $p_i = (p_i(\cdot \mid \omega_i))_{\omega_i \in \Omega_i}$ と定義される。ここで、$p_i(\cdot \mid \omega_i) : \Omega_{-i} \to [0,1]$ および $\sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i) = 1$ である。任意のタイプ ω_i のプレーヤー i は、他のプレーヤーのタイププロファイルが $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$ である確率を $p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i)$ と予想していることになる。

上の定義においては、タイプ集合が離散空間であることが仮定されている。しかし、収入同値定理など、オークション理論における重要な定理では、タイプ集合は概して連続空間（例えば区間[0,1]）とされる必要がある。その場合には、例えば、信念 p_i は Ω_i 上の累積分布関数と定義される。

不完備情報ゲーム Γ に、信念プロファイル $(p_i)_{i\in N}$ を追加することによって、情報の非対称性の状況をより詳細に定式化したものを、「ベイジアンゲーム（Bayesian Game）」と呼ぶ。つまり、ベイジアンゲームは

$$(\Gamma,(p_i)_{i\in N})=(N,M,(\Omega_i,u_i(\cdot,\omega))_{i\in N},(p_i)_{i\in N})$$

と定義される。

5. ベイジアンナッシュ均衡

ベイジアンゲームにおける代表的な均衡概念はベイジアンナッシュ均衡（Bayesian Nash Equilibrium）である。戦略プロファイル $s=(s_i,s_{-i})\in S$ がベイジアンゲーム $(\Gamma,(p_i)_{i\in N})$ におけるベイジアンナッシュ均衡であるとは、任意のプレーヤー $i\in N$ および任意のタイプ $\omega_i\in\Omega_i$ において、他のプレーヤーが s_{-i} に従う限りにおいて、行動選択 $s_i(\omega_i)$ が期待利得を最大化することを意味する。すなわち、任意のプレーヤー $i\in N$ および任意のタイプ $\omega_i\in\Omega_i$ において、

$$E[u_i(s(\omega),\omega)\,|\,\omega_i]\geq E[u_i(m_i,s_{-i}(\omega_{-i}),\omega)\,|\,\omega_i] \quad \text{for all} \quad m_i\in M_i$$

が成立する戦略プロファイル s を、ベイジアンゲーム $(\Gamma,(p_i)_{i\in N})$ におけるベイジアンナッシュ均衡と呼ぶ。ここで、$E[\cdot\,|\,\omega_i]$ はタイプ ω_i における条件付き期待値をあらわす。例えば、タイプ集合が離散空間である場合、

$$E[u_i(s(\omega),\omega)\,|\,\omega_i]=\sum_{\omega_{-i}\in\Omega_{-i}}u_i(s(\omega),\omega)\,p_i(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)$$

である。

ベイジアンナッシュ均衡は、優位戦略や事後均衡よりも制約の弱い均衡概念である。戦略プロファイル $s\in S$ が不完備情報ゲーム Γ における事後均衡であ

るならば、それは任意の信念プロファイル$(p_i)_{i\in N}$について、ベイジアンゲーム$(\Gamma,(p_i)_{i\in N})$におけるベイジアンナッシュ均衡になる。しかし、一般的には、同じ不完備情報ゲームであっても、信念がことなれば、ベイジアンナッシュ均衡もことなりうる。

6. メカニズムデザイン

「メカニズムデザイン（Mechanism Design）」は、どのような社会的仕組みによって、各経済主体の意思決定が配分決定に結び付けられているかを、「メカニズム」として定式化するアプローチである。そして、異なるメカニズムがどのような配分決定の違いをもたらすかが、比較分析される。

現実問題を考える際には、各経済主体の利得（効用）は、概して、行動選択の直接的帰結ではなく、財やサービスなどの配分と金銭的支払いの決定に対して定められるとされる。例えば、オークションにおける入札者の利得は、入札によって獲得される財とその対価に対して定められる。

可能な配分全体の集合（配分集合）をAとし、支払ベクトルの集合をn次元ベクトル空間R^nとする。社会状態$\omega\in\Omega$において、配分$a\in A$および支払ベクトル$t=(t_i)_{i\in N}\in R^n$が決定される場合、各経済主体$i\in N$の利得は$U_i(a,t_i,\omega)$と定められる。$U_i : A\times R\times\Omega\to R$は、配分と支払に対する経済主体$i$の利得関数である。$t_i\in R$は、経済主体$i$が支払う金額であり、$U_i(a,t_i,\omega)$は$t_i$の減少関数である。$t_i$が負の場合は、収入$-t_i$を獲得していると考える。

支払いの総和$\sum_{i\in N} t_i$がゼロである場合は、各経済主体は、他の経済主体のだれかにt_iを支払っていると解釈できる。$\sum_{i\in N} t_i$が正である場合、それは、モデルの外部に想定される「仲介者（Mediator）」の収入と解釈される。$\sum_{i\in N} t_i$が負である場合、それは仲介者が経済主体全員に対して支払う補助金と解釈される。仲介者は、現実問題に即して、政府、計画者、売り手など、様々に解釈される。

配分および支払いベクトル$(a,t)\in A\times R^n$は、あらかじめ定められた社会的仕組みにしたがって、各経済主体の行動選択によって決定される。各経済主体の行動選択を配分および支払いベクトルの決定に結び付ける仕組みを、メカニズム（Mechanism）と呼び、(M,g,x)と定義される。ここで、M_iは経済主体iの行動集合であり、$M=\underset{i\in N}{\times}M_i$は行動プロファイル集合である。$g:M\to A$は配分ルール（Allocation Rule）、$x=(x_i):M\to R^n$は支払ルール（Payment Rule）と呼ばれる。経済主体が行動プロファイル$m=(m_i)_{i\in N}\in M$を選択する場合、配分$g(m)\in A$が決定され、各経済主体iは$x_i(m)\in R$を支払うことになる。

7. メカニズムデザインと不完備情報ゲームの関係

任意のメカニズム(M,g,x)における配分と支払いの決定は、各経済主体をプレーヤーとみなすことによって、不完備情報ゲームとして、以下のように分析することができる。メカニズム(M,g,x)において、行動プロファイル$m\in M$が選択され、配分$g(m)\in A$および支払ベクトル$x(m)\in R^n$が決定される場合、各経済主体の利得は

$$U_i(g(m),x_i(m),\omega)$$

になる。留意すべきは、この利得は、社会状態ωおよび、メカニズム(M,g,x)を通じて行動プロファイルmによって、定められている点にある。よって、不完備情報ゲームにおける、各プレーヤー（経済主体）iの利得関数が、社会状態ωと行動プロファイルmの関数として、

$$u_i(m,\omega)=U_i(g(m),x_i(m),\omega)\quad\text{for all}\quad\omega\in\Omega\quad\text{and}\quad m\in M$$

と特定できる。この利得関数$u_i(\cdot,\omega)$をもとに、メカニズム(M,g,x)における不完備情報ゲームは

$$\Gamma(M,g,x)\equiv(N,M,(\Omega_i,u_i(\cdot,\omega))_{i\in N})$$

と定義される。こうして、メカニズム(M,g,x)の下で経済主体がどのように行動選択するかは、不完備情報ゲーム$\Gamma=\Gamma(M,g,x)$を均衡分析することによって考察可能になる。また、信念$(p_i)_{i\in N}$を追加的に定義することによって、メカニズム(M,g,x)を、ベイジアンゲーム$(\Gamma(M,g,x),(p_i)_{i\in N})$としても分析することができる。

8. 利得関数についての仮定

オークション理論においては、配分と支払いについての利得関数U_iに関して、以下に示される条件の全て、あるいはそのいくつか、が仮定される。

準線形性（Quasi-Linearity）：各経済主体iについて、関数$W_i:R\times\Omega\to R$および$v_i:A\times\Omega\to R$が存在して、

$$U_i(a,t_i,\omega)=W_i(v_i(a,\omega)-t_i,\omega)\quad \text{for all}\quad (a,t_i,\omega)\in A\times R\times\Omega$$

が成立する。

$v_i(a,\omega)$は、社会状態ωにおける、配分aに対する、入札者iの評価を、それと等価値になる金額で表したものである。一般的には、配分の価値を金銭に置き換える場合、それが入札者の支払額あるいは所得水準に依存する可能性、いわゆる「所得効果」を考慮しなければならない。準線形性は、分析を単純化するために、このような所得効果がないと仮定している。

準線形性は、ミクロ経済学における部分均衡分析においては必ず必要とされる仮定である。準線形性は、取引される財があまり高価値でない場合には、現実的に妥当な仮定といえる。$v_i:A\times\Omega\to R$を、経済主体iの評価関数（Valuation Function）と呼ぶ。

準線形性の下で、任意の社会状態$\omega \in \Omega$において、配分$a \in A$は、以下の条件をみたす時、「効率的（Efficient）」であると定義される。すなわち、配分に対する全プレーヤーの評価の総和が最大化される、つまり、

$$\sum_{i \in N} v_i(a,\omega) \geq \sum_{i \in N} v_i(a',\omega) \quad \text{for all} \quad a' \in A$$

が成立するならば、配分$a \in A$は効率的であるとする。留意するべきは、効率的な配分は支払いベクトルから独立に定まることである。

配分の効率性は、ミクロ経済学の部分均衡分析における「総余剰最大化」と実質的に同じ概念である。配分$a \in A$が効率的であるならば、任意の配分と支払ベクトルの組み合わせ$(a',t') \in A \times R^n$にたいして、かならず別の支払いベクトル$t \in R^n$が存在し、全プレーヤーの利得を同程度以上にできる、つまり、

$$W_i(v_i(a,\omega) - t_i, \omega) \geq W_i(v_i(a',\omega') - t_i, \omega) \quad \text{for all} \quad i \in N$$

が成立する。

関数$W_i(\cdot,\omega): R \to R$は、金銭（所得）に対する効用関数であり、増加関数である。経済主体iは、W_iが凹であればリスク回避的、凸であればリスク愛好的、線形であればリスク中立的である。この連載では、断りのない限り、各入札者はリスク中立的であるとされ、また、一般性を欠くことなく、関数W_iを同値関数とする。

リスク中立性：準線形性の仮定の下で、各プレーヤー$i \in N$について、

$$U_i(a,t_i,\omega) = v_i(a,\omega) - t_i \quad \text{for all} \quad (a,t_i,\omega) \in A \times R \times \Omega$$

とする。

配分に対する評価$v_i(a,\omega)$が他の経済主体のタイプω_{-i}にも依存する場合には、経済主体i本人は自身の評価額を正確に知らないことになる。例えば、配分される財の品質について情報が散在している状況では、$v_i(a,\omega)$はω_{-i}に依存しうる。ただし、グローブスメカニズムに代表されるメカニズムデザインの重要な

考察において、$v_i(a,\omega)$ は ω_{-i} に依存しないとする「私的価値（Private Values）」の仮定がおかれる。

私的価値（Private Values）：配分の評価は自身のタイプにのみ依存する、つまり、各プレーヤー $i \in N$ について、

$$v_i(a,\omega) = v_i(a,\omega_i) \quad \text{for all} \quad (a,\omega) \in A \times \Omega$$

とする。

9. 信念についての仮定

収入同値定理など、オークション理論の重要な定理においては、信念プロファイル $(p_i)_{i \in N}$ に関して、以下に示される諸条件が仮定される。

各経済主体 $i \in N$ は、どの社会状態が実現されているかについて「事前分布（Prior）」、つまり状態集合 Ω 上の確率関数 $p_i : \Omega \to [0,1]$、をもっているとし、各タイプごとの信念は、「ベイズ・ルール」にしたがって，自身の事前分布から導かれる条件付き確率として定義されているとする。すなわち、各プレーヤー $i \in N$ について、

$$p_i(\omega_{-i} \mid \omega_i) = \frac{p_i(\omega)}{\sum_{\omega'_{-i} \in \Omega_{-i}} p_i(\omega_i, \omega'_{-i})} \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega$$

が成立しているとする。

ベイジアンゲームを分析する場合には、概して、各プレーヤーの事前分布が同一であるとする「共通事前分布（Common Prior）」が仮定される。

共通事前分布（Common Prior）：全プレーヤーに共通の事前分布 $p : \Omega \to [0,1]$ が存在する、つまり、任意のプレーヤー $i \in N$ について、

$$p_i(\omega) = p(\omega) \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega$$

が成立する。

共通事前分布の仮定下では、各プレーヤーは情報を共有するならば、社会状態について同じ予想をたてることになる[3]。逆に、もし共通事前分布が存在しないならば、情報を共有していても予想がことなりうる。この場合には、情報の非対称性以外の要因、たとえば心理的要因、によって予想がことなるとされる。

オークションの多くの定理において、各プレーヤーのタイプには、他のプレーヤーのタイププロファイルについての情報が含まれないとする、いわゆる「分布独立性（Independent Type Distribution）」が仮定される。

分布独立性（Independent Type Distribution）：各プレーヤー$i \in N$の信念$p_i(\cdot | \omega_i)$はタイプω_iから独立である、つまり、Ω_{-i}上の確率関数$p_i : \Omega_{-i} \to [0,1]$が存在して、

$$p_i(\omega_{-i}) = p_i(\omega_{-i} | \omega_i) \quad \text{for all} \quad \omega = (\omega_i, \omega_{-i}) \in \Omega$$

が成立する。

共通事前分布と分布独立性の仮定から、共通事前分布は、

$$p(\omega) = \prod_{i \in N} p_i(\omega_i) \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega$$

をみたすことになる。共通事前分布と分布独立性は、オークション理論の重要な諸定理において仮定される。しかし、現実の経済問題において常に妥当であるわけではない。よって、これらの仮定がみたされないケースについても、連載を通じて説明していく予定である。

10. メカニズムとしてのオークション

[3] 信念が共通事前分布から導かれるとする仮定は､その仮定の有用性を指摘した Harsanyi にちなんで、ハーサニ原則（Harsanyi Doctrine）とも呼ばれる。

オークションのルールは、メカニズムとして定式化できる。以下に、例として、単一財 1 単位の取引において、一位価格入札と二位価格入札がどのようにメカニズムとして定式化されるかを説明する。

単一財 1 単位における配分は、その財が誰に落札されるか、ということに他ならないので、配分集合は $A = N$ と定義される。配分 $a = i$ は、入札者 i に財が落札されることを意味する。単純化のため、財の価値は区間 $[0,1]$ 内の実数とし、各入札者の財評価は 0 以上 1 以下とする。

10.1. 一位価格入札

一位価格入札では、各入札者 $i \in N$ が、区間 $[0,1]$ 内の実数 m_i を指値として提示する。よって、一位価格入札 (M, g, x) における行動集合は、指値全体の集合 $M_i = [0,1]$ である。最高指値をする入札者が落札者となるので、配分ルール g は

$$m_i \geq m_j \quad \text{for all} \quad j \in N \quad \text{if} \quad g(m) = i$$

をみたす任意の関数 $g : M \to A$ である[4]。

落札者は自身の指値を売り手に支払うが、非落札者は何も支払わない。よって、支払ルール x は、

$$x_i(m) = m_i \quad \text{if} \quad i = g(m)$$

$$x_i(m) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq g(m)$$

になる。こうして、一位価格入札はメカニズム (M, g, x) として定式化できる。

一位価格入札のメカニズムは、せり下げオークションとしても解釈できる。せり下げオークションでは、せり人が最高価格 1 から徐々にせり下げ、購入希望者があらわれた時点でせりを終了し、終了時点の価格で取引される。行動選択 $m_i \in [0,1]$ を、「購入を希望する最大価格、すなわちこの価格までせりさげられた時にはじめて購入希望の意思表示をする価格」と読み替えれば、上述のメカニズムはせり下げオークションとしても解釈できる。

[4] 最高指値が複数いる場合にはランダムに落札者を決めるルールも考えられるが、ここでは取り扱わない。

10.2. 二位価格入札

二位価格入札(M,g,x)は、一位価格入札とは、行動集合と配分ルールについて共通するものの、支払ルールがことなる。なぜなら、落札者は、自身の指値ではなく、非落札者の最高指値$\max_{j\neq i} m_j$（二位価格）を支払うからである。よって、二位価格入札における支払ルールxは、

$$x_i(m)=\max_{j\neq i} m_j \quad \text{if} \quad i=g(m)$$

$$x_i(m)=0 \quad \text{if} \quad i\neq g(m)$$

とされる。最高指値の入札者が複数存在する場合には、落札者は自身の指値を支払うが、それ以外では自身の指値より低い価格を支払うことになる。

せり上げオークションは、二位価格と同じメカニズムとして定式化されるケースがある。たとえば、入札者があらかじめせり上げに応じることができる最高額を決めておき、オークションの際には機械的にこの額までせり上げに応じていく「代理（プロキシ）入札」は、二位価格と同じメカニズムとして定式化できる。

また、入札者が二人のみのケース、そして、なによりも重要なケースとして、私的価値が仮定されるケースでは、せり上げオークションは二位価格入札と同じメカニズムと考えて差し支えない。

しかし、入札者が 3 人以上の、私的価値でない（Interdependent Values）ケースでは、入札者がせり上げ途中で得られる情報を利用する可能性がある。そのため、入札者の戦略を、せり上げの経緯に依存する形式として定義しなおす必要がある。よって、このケースでは、二位価格入札とせり上げオークションは、厳密に区別して分析されなければならない。

11. 次回の予告

次回は、私的価値の仮定の下で、標準的なオークションルールである一位価格入札（あるいはせり下げオークション)、および二位価格入札（あるいはせり上げオークション）を、優位戦略やベイジアンナッシュ均衡を使って、均衡分析する。入札者がどのような行動をとるか、望ましい配分が達成されるかなどについて、徹底的に比較検討する。

参考文献

Kuhn, H. and S. Nasar (2002): *The Essential John Nash*, Princeton University Press. クーン・ナサー（落合卓四郎・松島斉訳）:「ナッシュは何を見たか」、シュプリンガーフェアラーク東京、２００５.