2013 年 11 月 5 日

経済セミナー 2013 年 12, 2014 年 1 月号

「オークションとマーケットデザイン」第 8 回

期待収入最大化オークションデザイン

松島斉

東京大学経済学研究科教授

多くの売り手は、オークションでなるべく高く売りたいと考えている。そのためには、配分の効率性を損ねることも辞さないだろう。今回は、入札者の誘因整合性と参加制約下で、売り手の期待収入を最大化するオークションルールがどのように設計されるかを解説する[1]。

特に、留保価格を設定して、売れ残りを承知の上で、低価格取引を排除することによって、期待収入を高める方法を説明する。さらに、留保価格を設定せずに、潜在的な入札者をオークションに参加させ、入札者間の競争を煽ることによって、収入を高める方法も検討する。留保価格を緻密に計算して設定するよりも、参入促進策の方が効果的であることを説明する。

[1] 今回の補助文献として、Krishna (2009, Chapter 5)がある。Myerson (1981)は代表的古典である。

１．同値定理再考

連載第 6 回で説明された「表明原理（Revelation Principle）」によれば、任意のメカニズムによって達成できる配分と支払のパターンは、何らかの「直接メカニズム（Direct Mechanism）」によっても達成できる。よって、直接メカニズムのみを考察対象としてよい。

直接メカニズムは、配分ルールと支払ルールの組み合わせ(g,x)として、

$$g:M\to A、\ x=(x_i)_{i\in N}、\ x_i:\Omega\to R$$

と定義される。各プレーヤー$i\in N$は、自身のタイプがどれであるかを直接的に表明する。売り手（仲介者、せり人など）は、表明されたタイププロファイル$\omega=(\omega_i)_{i\in N}\in\Omega$にもとづいて、配分$g(\omega)\in A$を選択し、各プレーヤー$i$に$x_i(\omega)\in R$の支払いを請求する[2]。

各プレーヤーが自身のタイプを正直に表明するインセンティブをもつように、連載第 6 回において説明された、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性（Bayesian Incentive Compatibility, BIC）を、直接メカニズム(g,x)に対して要求する。

ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性（BIC）：直接メカニズム(g,x)は、正直戦略プロファイルがベイジアン・ナッシュ均衡である場合、つまり、任意の$i\in N$，$\omega_i\in\Omega_i$，$\omega_i'\in\Omega_i$ について、

$$E[U_i(g(\omega),x_i(\omega),\omega)\,|\,\omega_i]\geq E[U_i(g(\omega_i',\omega_{-i}),x_i(\omega_i',\omega_{-i}),\omega)\,|\,\omega_i]$$

が成立する場合、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合的であると呼ばれる。ここで、$E[\cdot|\omega_i]$は、ω_{-i}についての、タイプω_iの条件付き期待値を意味する。

---

[2] 期待収入最大化においては、配分を確率的に決定することが考慮される。この連載では、単純化のため、確率的な配分決定を考慮しないが、考慮しても、内容の本質的な変更はない。

以降は、準線形性、リスク中立性、分布独立性、実数空間のタイプ集合（つまり、$\Omega_i = [0,1]$ for all $i \in N$）を仮定する。議論を進めた段階で、私的価値の仮定などが追加される。

連載第 6 回の定理６－２、６－３、６－４にしたがって、同値定理が成立する。

定理８－１ (同値定理)： BIC をみたす任意の直接メカニズム(g,x)において、各プレーヤーiの任意のタイプω_iにおける期待利得$y_i^*(\omega_i)$は、

（１）　$$y_i^*(\omega_i) = \int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i}) \mid \omega_i']d\omega_i' + y_i^*(0),$$

各プレーヤーiの任意のタイプω_iにおける期待支払額$E[x_i(\omega) \mid \omega_i]$は、

（２）　$$E[x_i(\omega) \mid \omega_i] = E[v_i(g(\omega),\omega) \mid \omega_i]$$
$$-\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i}) \mid \omega_i']d\omega' - y_i^*(0),$$

売り手の期待収入$E[\sum_{i\in N} x_i(\omega)]$は、

（３）　$$E[\sum_{i\in N} x_i(\omega)] = E[\sum_{i\in N} v_i(g(\omega),\omega)]$$
$$-\sum_{i\in N} E_{\omega_i}[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i}) \mid \omega_i']d\omega_i'] - \sum_{i\in N} y_i^*(0)$$

である。ここで、$E[\cdot]$は状態ωについての期待値、$E_{\omega_i}[\cdot]$はタイプω_iについての期待値を表す。

同値定理をさらに掘り下げて分析すると、BIC をみたす直接メカニズムがもたらす期待収入（３）は、より直観的な形式に書き換えられることがわかる。定理８－１の（２）より、各プレーヤーiの、事前の意味での、期待支払額$E[x_i(\omega)]$は、

$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega),\omega)]$$

$$-E_{\omega_i}[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})\,|\,\omega_i']d\omega'] - y_i^*(0)$$

である。分布独立性より、

$$E_{\omega_i}[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} E[v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})\,|\,\omega_i']d\omega']$$

$$= E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})d\omega_i']$$

が成り立つので、

$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega),\omega)] - E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})d\omega_i'] - y_i^*(0)$$

である。

任意のω_{-i}を所与として、任意のω_i'について、期待値

$$E[\int_{\omega_i'=0}^{\omega_i} v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})d\omega_i']$$

の中に$v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})$が登場するのは、$\omega_i$が$\omega_i'$以上になるケースである。よって、$v_{i2}(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i',\omega_{-i})$に、$\omega_i$が$\omega_i'$以上になる確率$1-P_i(\omega_i')$をウエイト付けすることによって、プレーヤー$i$の期待支払額は、

$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega),\omega)] - E_{\omega_{-i}}[\int_{\omega_i\in\Omega_i} v_{i2}(g(\omega),\omega)\{1-P_i(\omega_i)\}d\omega_i] - y_i^*(0)$$

と表される。（ここで、$E_{\omega_{-i}}[\cdot]$はω_{-i}についての期待値を表す。）さらに、

$$E_{\omega_{-i}}[\int_{\omega_i\in\Omega_i} v_{i2}(g(\omega),\omega)\{1-P_i(\omega_i)\}d\omega_i]$$

$$= E_{\omega_{-i}}[\int_{\omega_i\in\Omega_i} v_{i2}(g(\omega),\omega)\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}p_i(\omega_i)d\omega_i]$$

$$= E[v_{i2}(g(\omega),\omega)\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}]$$

であることから、

（４）　$$E[x_i(\omega)] = E[v_i(g(\omega),\omega) - v_{i2}(g(\omega),\omega)\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}] - y_i^*(0)$$

が導かれる。

状態ωおよび配分aにおいて、プレーヤーiがもたらす「限界収入（Marginal Revenue）」、別名「事実上の評価（Virtual Valuation）」、を、

（５）　$$MR_i(a,\omega;p_i) \equiv v_i(a,\omega) - v_{i2}(a,\omega)\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}$$

と定義する。限界収入$MR_i(a,\omega;p_i)$の解釈については、次節にて解説する。

プレーヤーiの期待支払額は、（４）に（５）を代入することによって、限界収入の期待値（マイナス$y_i^*(0)$）、つまり

$$E[x_i(\omega)] = E[MR_i(g(\omega),\omega;p_i)] - y_i^*(0)$$

と表わされる。よって、売り手の期待収入は、限界収入の和の期待値（マイナス$\sum_{i\in N} y_i^*(0)$）に等しいことになる。

定理８－２：BIC をみたす任意の直接メカニズム(g,x)がもたらす期待収入は、

（６）　$$\sum_{i\in N} E[x_i(\omega)] = E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)] - \sum_{i\in N} y_i^*(0)$$

と表わされる。ここで、$y_i^*(0)$は、プレーヤーiのタイプ$\omega_i = 0$における期待利得を意味する。

２．限界収入、あるいは事実上の価値、の解釈

等式（５）によって定義された$MR_i(a,\omega;p_i)$は、売り手が入札者iから引き出すことのできる「事実上の価値（Virtual Valuation）」、あるいは、売り手が、入札者iに配分を割り当てる確率を限界的に増やした場合の収入増加分、つまり限界収入（Marginal Revenue）、として、以下のように解釈される。

売り手が任意の配分ルール g を実行させたい場合、もし真の状態 ω を知っていれば、各プレーヤー i に評価の総額 $v_i(g(\omega),\omega)$ を請求することによって収入を最大化できる。しかし、実際には情報の非対称性下にあるため、各プレーヤー i は嘘のタイプ表明をして戦略的に行動するので、売り手はこのようには収入を最大化できない。よって、情報の非対称性故に、各プレーヤー i は、$v_{i2}(a,\omega)\dfrac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}$ を「情報レント」として確保できることになる。売り手の側からは、情報レントを差し引いた残額が事実上の評価になる。それは

$$MR_i(a,\omega;p_i)\equiv v_i(a,\omega)-v_{i2}(a,\omega)\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}$$

に等しい。

$MR_i(a,\omega;p_i)$ は、独占的供給者としての売り手の限界収入と解釈することもできる。例えば、売り手が単一種一単位を独占的にプレーヤー i に売却する状況を考えよう。プレーヤー i のタイプ ω_i における財評価を ω_i とする。売り手が一定価格 r でプレーヤー i に販売するならば、プレーヤー i は $\omega_i\geq r$ である時、その時のみ、購入する。よって、確率 $1-P_i(r)$ で売却することができるので、売り手の期待収入は $r\{1-P_i(r)\}$ になる。

売却確率 $1-P_i(r)$ を取引量に見立てるならば、取引量 $1-P_i(r)$ を限界的に増やすことによる期待収入の変化分、つまり限界収入、は

$$\frac{d[r\{1-P_i(r)\}]}{d\{1-P_i(r)\}}=\frac{dr}{d\{1-P_i(r)\}}\cdot\frac{d[r\{1-P_i(r)\}]}{dr}=r-\frac{1-P_i(r)}{p_i(r)}$$

になる。この値は、

$$MR_i(i,(r,\omega_{-i});p_i)=v_i(i,(r,\omega_{-i}))-v_{i2}(i,(r,\omega_{-i}))\frac{1-P_i(r)}{p_i(r)}=r-\frac{1-P_i(r)}{p_i(r)}$$

に等しい。（ここで、$v_i(i,\omega)=\omega_i$、$v_{i2}(i,\omega)=1$ に気付かれたい。）

３．期待収入最大化問題

売り手は、情報の非対称性下で、期待収入がなるべく高くなるように直接メカニズムを設計したい。この際、直接メカニズムには、BIC とともに、プレーヤーがメカニズムに参加することで不利益をこうむらないとする「中間個人合理性（Interim Individual Rationality, IIR）」（別名「参加制約（Participation Constraint）」）が要求される。単純化のため、オークションに参加しないことによって得られる機会費用をゼロと仮定する。

中間個人合理性（IIR）: 任意のプレーヤー $i \in N$、任意のタイプ $\omega_i \in \Omega_i$ について、

$$y_i^*(\omega_i) = E[v_i(g(\omega),\omega) + x_i(\omega) \mid \omega_i] \geq 0$$

が成立する。ここで、$E[\cdot \mid \omega_i]$ は、ω_{-i} についての、タイプ ω_i の条件付き期待値を意味する。

期待収入最大化問題：売り手は、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性（BIC）と中間個人合理性（IIR）の制約下で、期待収入 $E[\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)]$ を最大化する直接メカニズム (g,x) を設定する。つまり、期待収入最大化問題は、

$$\max_{(g,x)} E[\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)] \quad \text{subject to BIC and IIR}$$

と定式化される。

追加の仮定として、タイプが最低（$\omega_i = 0$）の場合には、配分に関係なく、評価が最低になる、つまり、

$$v_i(a,\omega) \geq v_i(a,(0,\omega_{-i})) \quad \text{for all } a \in A, \text{ all } i \in N, \text{ and all } \omega \in \Omega$$

とする。この仮定によって、IIR の制約条件は、より単純な条件、つまり、

$$E[v_i(g(\omega),\omega) + x_i(\omega) \mid \omega_i = 0] \geq 0 \quad \text{for all } i \in N$$

に置き換えられる。期待収入最大化問題においては、IIR を要求する代わりに、タイプゼロの場合の期待利得が機会費用ゼロに一致する、つまり

$$y_i^*(0) = E[v_i(g(\omega),\omega) + x_i(\omega) \mid \omega_i = 0] = 0 \quad \text{for all} \quad i \in N$$

としてよい。

直接メカニズム (g,x) が BIC をみたす支払ルール x が存在する配分ルール g の全体集合を $\hat{G}$ とする。以上の議論から、期待収入最大化問題は、集合 $\hat{G}$ の範囲内で、限界収入の和の期待値 $E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)]$ を最大化する問題に置き換えられることがわかる。

定理８－４：BIC および IIR の制約下での期待収入最大化問題は、

$$\max_{g\in\hat{G}} E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)]$$

に等しい。

期待収入最大化問題の解決は、一般的には、集合 $\hat{G}$ がどのような範囲かが明らかでないため、決して容易ではない。解法の一例としては、まず、限界収入の和の期待値 $E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)]$ を、集合 $\hat{G}$ ではなく、配分ルール全体集合（G とする）について最大化する。つまり

$$\max_{g\in G} E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)]$$

を解き、最大化配分ルール $\bar{g}\in G$ を導く。さらに、支払いルール $x=\bar{x}$ を、直接メカニズム $(g,x)=(\bar{g},\bar{x})$ が（２）をみたすように設計する。そして、最終ステップとして、設計された $(\bar{g},\bar{x})$ が BIC をみたすかどうか、つまり $\bar{g}\in\hat{G}$ が成立しているかどうかを確認する。もし $\bar{g}\in\hat{G}$ が確認できれば、BIC と IIR の制約下での期待収入最大化問題は解かれたことになる。

以下に定義される「規則性（Regularity）」は、期待収入最大化問題が、上述したやり方で解くことができることを保証する条件である。

規則性（Regularity）：限界収入の和の期待値 $E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)]$ を最大にする配分ルール $\bar{g}\in G$ は、集合 $\hat{G}$ に属する。

定理８－５：規則性下では、BICおよびIIRの制約下での期待収入最大化問題は、

$$\max_{g\in G} E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)]$$

に等しい。

一般的には、規則性は成立するとは限らない。しかしながら、規則性が成立するための様々な十分条件が、Myerson (1981), Maskin and Riley (1989), Myerson and Satterthwaite (1985), Ulku (2010), Matsushima (2012)などによって示されている[3]。次節では、Myerson (1981)による先駆的分析に従って、単一種一単位取引における期待収入最大化問題を考察しよう。

４．単一財一単位取引における期待収入最大化

私的価値（Private Values）を追加的に仮定する。連載第 5 回に従って、

$$v_i(a,\omega_i)=\omega_i \qquad \text{if } a=i$$

$$v_i(a,\omega_i)=0 \qquad \text{if } a\neq i$$

とする。配分集合は、連載第 5 回とは若干ことなり、

$$A=N\bigcup\{0\}=\{0,1,...,n\}$$

とし、配分 $a=0$ を考慮する。配分 $a=0$ は、誰にも落札されないこと、つまり「売れ残り」を意味する。$a=i$ は、財が入札者 i に落札されることを意味する。

限界収入は、

[3] これらの十分条件においては、共通して、私的価値、実数空間のタイプ集合の仮定が重要な役割をなしている。

$$MR_i(a,\omega_i;p_i)=0 \qquad \text{if} \quad a\neq i$$

$$MR_i(a,\omega_i;p_i)=\omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)} \qquad \text{if} \quad a=i$$

になる。（私的価値の仮定より、$MR_i(a,\omega;p_i)$ は ω_{-i} から独立であるから、$MR_i(a,\omega_i;p_i)$ と書き換えられている。）

配分ルール全体の集合 G の中で $E[\sum_{i\in N} MR_i(g(\omega),\omega;p_i)]$ を最大化する配分ルール $g\in G$ は、以下のように特定化できる。任意の $\omega\in\Omega$ について、入札者 i に落札される場合には、入札者 i の限界収入はゼロ以上、かつ、他の入札者の限界収入以上である、つまり、

（７）　$MR_i(i,\omega_i;p_i)\geq MR_i(j,\omega_j;p_j)$ for all $j\neq i$, and $MR_i(i,\omega_i;p_i)\geq 0$

if $g(\omega)=i$,

が成立する。全入札者の限界収入が負である場合には、誰にも落札されない、つまり、

（８）　$g(\omega)=0$ 　if $MR_i(i,\omega_i;p_i)<0$ for all $i\in N$,

が成立する。

非落札者の限界収入はゼロであることから、BIC および IIR の制約のない最大化期待収入は、

$$\max_{g\in G} E[MR_i(g(\omega),\omega_i;p_i)]=E[\max[\max_{i\in N} MR_i(i,\omega_i;p_i),0]]$$

$$=E[\max[\max_{i\in N}\{\omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\},0]]$$

に等しい。つまり、各入札者の落札時の限界収入およびゼロの中で、最大になる値

$$\max[\max_{i\in N}\{\omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\},0]$$

の期待値に等しい。

４．１．単調性

単一種一単位取引のケースでは、集合$\hat{G}$は、以下に定義される「単調性（Monotonicity）」をみたす配分ルール全体の集合に一致することが示される。単調性は、より高いタイプの方が落札されやすいことを意味する条件である。

単調性（Monotonicity）：配分ルールgは、任意の$\omega \in \Omega$、$i \in N$、$\omega_i' \in \Omega_i$について、

$$[\,\omega_i' > \omega_i \text{ かつ } g(\omega) = i\,] \Rightarrow [\,g(\omega_i', \omega_{-i}) = i\,]$$

である場合、単調性をみたすと呼ばれる。

配分ルールが単調性をみたす場合、各入札者iおよび任意の他の入札者のタイププロファイルω_{-i}について、評価$r_i(\omega_{-i}) \in [0,1]$が存在して、入札者$i$のタイプが評価$r_i(\omega_{-i})$を超える（下回る）ならば、入札者$i$は財を落札できる（できない）。すなわち、

$$g(\omega) = i \qquad \text{if} \quad \omega_i > r_i(\omega_{-i})$$

$$g(\omega) \neq i \qquad \text{if} \quad \omega_i < r_i(\omega_{-i})$$

が成立する。

さらに、支払ルールxを以下のように特定化する。つまり、各入札者は、落札時には$r_i(\omega_{-i})$を支払い、非落札時には何も支払わない、すなわち、

（９）　$x_i(\omega) = r_i(\omega_{-i}) \qquad \text{if} \quad g(\omega) = i,$

（１０）　$x_i(\omega) = 0 \qquad \text{if} \quad g(\omega) \neq i$

とする。

このように特定化された直接メカニズム(g, x)は、BIC のみならず、より強い制約条件である優位戦略誘因整合性（DIC）[4]をもみたしている。落札時の支払額$r_i(\omega_{-i})$が、自身のタイプ表明から独立であること、および、正直に表明する

[4] DIC については、連載第 6 回を参照のこと。

ことによって、支払額$r_i(\omega_{-i})$が自身の評価ω_iを下回る時、その時のみ、落札されることから、DIC が成立することを証明できる。また、この直接メカニズムは、$y_i^*(0)=0$をみたしている。

以上より、(7) および (８) をみたす配分ルールgが単調性をみたすならば、$g\in\hat{G}$が成立する。よって、BIC と IIR の制約下での収入最大化問題が解かれたことになる。(7) および（８）をみたす配分ルールgが単調性をみたすということは、すなわち、任意の入札者$i\in N$について、落札時の限界収入$MR_i(i,\omega_i;p_i)$がタイプω_iについて増加関数であることと同値である。よって、以下の定理が証明された。

定理８－６：任意の入札者$i\in N$について、落札時の限界収入

$$MR_i(i,\omega_i;p_i)=\omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}$$

がタイプω_iについて増加関数であるならば、BIC および IIR の制約下で期待収入を最大化するメカニズム(g,x)は、（７）、（８）、（９）、（１０）、つまり

$$\omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\geq\omega_j-\frac{1-P_j(\omega_j)}{p_j(\omega_j)}\ \text{ for all }\ j\neq i,\text{ and }\ \omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\geq 0$$

$$\text{if}\ \ g(\omega)=i,$$

$$g(\omega)=0 \qquad \text{if}\ \ \omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}<0\ \text{ for all }\ i\in N,$$

$$x_i(\omega)=r_i(\omega_{-i}) \qquad \text{if}\ \ g(\omega)=i,$$

$$x_i(\omega)=0 \qquad \text{if}\ \ g(\omega)\neq i$$

によって特定化される。ここで、$r_i(\omega_{-i})$は、

$$r_i(\omega_{-i})-\frac{1-P_i(r_i(\omega_{-i}))}{p_i(r_i(\omega_{-i}))}=\max[\max_{j\neq i}[\omega_j-\frac{1-P_j(\omega_j)}{p_j(\omega_j)}],0]$$

によって一意に定義される。BIC および IIR の制約下での最大化期待収入は

$$E[\max[\max_{i\in N}\{\omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\},0]]$$

に等しい。

全ての入札者について、落札時の限界収入が負である、つまり

$$MR_i(i,\omega_i;p_i)=\omega_i-\frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}<0 \quad \text{for all} \quad i\in N$$

であるならば、この社会状態ωにおいて財は売却されない。それ以外の社会状態においては、売り手は限界収入が一番高い入札者に財を落札させる。

このことは、売り手が、個々の入札者を「ことなる差別化市場」とみなして、第三種価格差別化によって、独占利潤を稼ごうとする状況になぞらえられる。第三種価格差別化によって、売り手は、限界収入の相対的に高い市場（入札者）に優先的に財を供給することで、期待収入を高めようとするのである[5]。

４．２．分布対称性と留保価格付き二位価格入札

状況をさらに限定して、分布対称性が成り立つ、つまり

$$p_i(\omega_i)=p_j(\omega_j) \quad \text{if} \quad \omega_i=\omega_j$$

が成立する状況を考察しよう。落札時の限界収入がゼロになる財評価（タイプ）、すなわち、

$$MR_1(1,r;p_1)=r-\frac{1-P_1(r)}{p_1(r)}=0$$

となる$r\in[0,1]$を、「留保価格（Reserve Price）」と呼ぶことにする。落札時の限界収入がタイプについて増加であるとする仮定から、分布対称性下では、期待収入最大化をもたらす配分ルールは、財評価（タイプ）が最大でありかつ留保価格以上の入札者に落札するルールになる。すなわち、

$$\omega_i\geq\omega_j \quad \text{for all} \quad j\in N\text{, and} \quad \omega_i\geq r \qquad \text{if} \quad g(\omega)=i,$$

[5] 関連文献として、Bullow and Roberts (1989)がある。

$$g(\omega)=0 \qquad \text{if} \quad \omega_i < r \quad \text{for all} \quad i \in N$$

がみたされる。落札者の支払額$r_i(\omega_{-i})$は、二位価格$\max_{j\neq i}\omega_j$と留保価格rの大きい方、つまり

$$r_i(\omega_{-i}) = \max[\max_{j\neq i}\omega_j, r]$$

と特定化される。

上述した説明から、分布対称性下では、「留保価格付き二位価格入札」が、期待収入を最大化するオークションルールになることがわかる。落札者は、二位価格が留保価格にみたない場合には、二位価格より高い留保価格を支払うことになる。一方、入札者全員のタイプが留保価格にみたない場合には、売れ残りが生じる。

４．３．売れ残りをみとめない制約下での期待収入最大化

売り手は、留保価格を設定して、売れ残りを承知で、落札者の支払額をつりあげようとする。しかし、実際に財が売れ残った場合には、留保価格を引き下げて再入札して、売り切ろうとするかもしれない。入札者は、このような再入札を見越して、指値をひかえようとするだろう。そのため、売り手は、留保価格を駆使しても十分に収入を高めることができないかもしれない[6]。

売れ残りが生じないように、すなわち、配分ルールgが

$$g(\omega)\neq 0 \quad \text{for all} \quad \omega\in\Omega$$

をみたす範囲内で、期待収入を最大化する問題は、前述とほぼ同様の仕方で考察できる。この場合、BIC および IIR の制約下での最大化期待収入は

$$E[\max_{i\in N} MR_i(i,\omega_i;p_i)] = E[\max_{i\in N}\{\omega_i - \frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\}]$$

6 このような観点から収入最大化オークションを動学的に分析した論文には、Skreta（2006）などがある。

に等しくなる。

売り手は、任意の状態$\omega \in \Omega$において、正負に関係なく、落札時の限界収入が最大になる入札者に落札することになる。分布対称性下では、二位価格入札が、期待収入を最大化するオークションルールになり、効率的配分も達成される。また、収入同値定理より、一位価格入札も、期待収入を最大化することになる。

しかし、分布対称性がみたされない場合では、二位価格入札も一位価格入札も、期待収入を最大化するルールにはならないし、配分の効率性も達成されない。

４．４．参入促進で収入を高める

留保価格設定とは異なる仕方で、期待収入を高める方法としては、オークションの参加者を増やすことで入札者間の競争を駆り立てて、支払額を高騰させる、参入促進策が考えられる。潜在的な入札者、つまり入札者$n+1$、を新たにオークションに参加させた場合には、仮に他の入札者の落札時の限界収入がすべて負であっても、売れ残らせずに、入札者$n+1$に正の価格で財を売却できるかもしれない。

既に説明した様に、オークションにおける期待収入最大化問題は、第三種価格差別化に見立てることができる。売れ残りを考慮する売り手は、あたかも$n+1$番目の市場として、収入の見込みが全くない市場を想定して、他の市場（入札者）の限界収入が負であるならば、$n+1$番目の市場にたたき売りをすることで、期待収入を最大化している。

それに対して、新たに$n+1$番目の入札者を招き入れると、$n+1$番目の市場として、収入の見込みのある市場を想定することになるので、期待収入は、売

れ残りを考慮せずともより高くなると考えられる。$n+1$番目の入札者を参加させることによって、売れ残りのない制約下での最大化期待収入は

$$E[\max_{i \in N \cup \{n+1\}} MR_i(i, \omega_i; P_i)] = E[\max_{i \in N \cup \{n+1\}} \{\omega_i - \frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\}]$$

となる。これは、売れ残りを考慮するも$n+1$番目の入札者が参加しない場合の最大化期待収入

$$E[\max[\max_{i \in N} MR_i(i, \omega_i; P_i), 0]] = E[\max[\max_{i \in N}\{\omega_i - \frac{1-P_i(\omega_i)}{p_i(\omega_i)}\}, o]]$$

以上の値になる[7]。

次回の予告

連載第 4 回から今回（第 8 回）まで、個別入札者がタイプを正直に表明するインセンティブを持つこと、つまり誘因整合性をメカニズムに要求することで、効率性や高収入の達成可能性を検討してきた。しかし、現実のオークションにおいては、入札者同士、あるいは一部の入札者と売り手、が、共謀して、カルテルや談合を形成して、他のオークション関係者の利害を犠牲にして、共同の利益を高めようとしている。

次回は、カルテル形成がオークションに及ぼす影響と、カルテルを阻止するオークションルールの設計方法について考察する。

[7] Bullow and Klemperer (1996)を参照されたい。

参考文献

Bullow, J. and P. Klemperer (1996): “Auctions vs. Negotiations,” *American Economic Review* 86, 80-194.

Bullow, J. and J. Roberts (1989): “The Simple Economics of Optimal Auctions,” *Journal of Political Economy* 97, 1060-1090.

Krishna, V. (2010): *Auction Theory*, Academic Press.

Maskin, E. and J. Riley (1989): “Optimal Multi-Unit Auctions,” in *The Economics of Missing Markets, Information, and Games* (F. Hahn, Ed.), 1989, Oxford University Press.

Matsushima, H. (2012): “Optimal Multiunit Exchange Design,” CIRJE-F-853, University of Tokyo.

Milgrom, P. (2004): *Putting Auction Theory to Work*, Cambridge University Press.

Myerson, R. (1981): “Optimal Auction Design,” *Mathematics of Operations Research* 6, 58-73.

Myerson, R. and M. Satterthwaite (1983): “Efficient Mechanisms for Bilateral Trading,” *Journal of Economic Theory* 29, 265-281.

Skreta, V. (2006): “Sequentially Optimal Mechanisms,” *Review of Economic Studies* 73, 1085-1111.

Ulku, L. (2009): “Optimal Combinatorial Mechanism Design,” ITAM Working Paper 0903.