

2013年2月24日

経済セミナー 2013年4,5月号

「オークションとマーケットデザイン」第5回

標準的なオークションの均衡分析

松島 齊

東京大学経済学研究科教授

今回は、オークション理論においてもっとも基礎的とされる「単一種一単位」の財取引について解説する。一位価格入札、二位価格入札、せり上げオークション、せり下げオークションといった標準的なオークションのルールにおける入札者の行動を、優位戦略、ベイジアンナッシュ均衡といった均衡概念によって分析する。配分の効率性、入札者の期待支払額および期待利得、売り手の期待収入について、ルール間で違いがあるか、どのルールが優れているか、などを比較検討する¹。

1. 理論学習の心得

理論を学習する際に注意すべき点は、特定の理論によって定性的な帰結が明らかにされたからといって、その帰結が現実をそのまま記述してくれるとは限らないことである。たとえば、今回は、入札者同士が談合（カルテル）を結ぶ可能性を考慮しないが、もし談合を考慮するならば、別の理論が必要になり、

¹ 今回の内容を補助する文献として、Krishna (2009, Chapter 2, 3, and 4)がある。Vickrey (1961)は今回の内容についての代表的古典である。

その方が現実をよりよく説明できるかもしれない。また、理論的帰結は、前提とされる諸仮定に少なからず依存する。よって、理論的帰結が、どのような仮定にどの程度依存しているかについて、常に注意をはらうことが大事になる。

断りのない限り、前回解説した、準線形性、私的価値、分布独立性、リスク中立性を仮定する。これらの仮定にどの程度依存するかは、理論的帰結ごとにまちまちである。例えば、私的価値の仮定は、効率的配分達成を説明する理論においてはとても重要な役割をはたす。また、分布独立性の仮定の有無は、期待利得、期待支払額、期待収入に重要な影響を与える。

準線形性の仮定は、オークション理論全般において、均衡分析を容易にし、わかりやすくするために不可欠といえる²。また、今回は、私的価値あるいは分布独立性が成り立たないケースを扱わない。しかし、このケースの考察は重要であるため、回を改めて解説する予定である。

2. 単一種一単位の財取引

$n \geq 2$ 人の入札者がオークションに参加している。任意のタイプ $\omega_i \in \Omega_i$ の入札者 $i \in N \equiv \{1, \dots, n\}$ の利得関数は、私的価値およびリスク中立性より、

$$U_i(a, t_i, \omega) \equiv v_i(a, \omega_i) - t_i \text{ for all } (a, t_i, \omega) \in A \times R \times \Omega$$

と定義される。ここで、前回同様に、 A は配分集合、 Ω_i は入札者 i のタイプ集合、 $\Omega = \times_{i \in N} \Omega_i$ はタイププロファイルの集合を表す。

売り手は単一種一単位を売却する。配分集合は $A = N$ で与えられる。入札者 i は、 $a = i$ の時、その時のみ、財を落札する³。一般性をあまり欠くことなくモデルを簡素化して、 $\Omega_i = [0, 1]$ とし、さらに

$$\begin{aligned} v_i(a, \omega_i) &= \omega_i && \text{if } a = i \\ v_i(a, \omega_i) &= 0 && \text{if } a \neq i \end{aligned}$$

² 準線形性をみたまないオークションの理論としては、Saitoh and Serizawa (2008), Sakai (2013) などがある。

³ 配分集合を $A = N \cup \{0\}$ とし、 $a = 0$ を「誰にも落札しない」決定とする定式化もある。

とすることができる⁴。タイプ ω_i は、財評価の値を表し、より高い値であればあるほど入札者 i は財を高く評価している。

前回説明したように、私的価値の仮定下では、二位価格入札とせり上げオークション、および一位価格入札とせり下げオークションは、形式的に同じモデルによって、同じ均衡分析をすることができる。よって、今回は、一位価格入札と二位価格入札について分析すればことたりる。ただし、私的価値が仮定されないならば、これらの同一性はなりたたない⁵。

一位価格入札、二位価格入札ともに、各入札者は指値 $m_i \in M_i = [0,1]$ をせり人に申告し、最高指値をした入札者に財が落札される。オークションのルールをメカニズム (M, g, x) であらわすならば、配分ルール $g: M \rightarrow A$ は、任意の入札者 $i \in N$ 、および任意の行動（指値）プロファイル $m \in M$ について、

$$m_i \geq m_j \text{ for all } j \in N \quad \text{if } g(m) = i$$

をみたすことになる。また、一位価格入札、二位価格入札ともに、非落札者は金銭的支払いをしない、つまり

$$x_i(m) = 0 \quad \text{if } g(m) \neq i$$

とされる。よって、一位価格入札と二位価格入札のルール上の違いは、落札者の支払額がどのように特定されるかにある。

ある戦略プロファイル $s \in S$ について、高いタイプの、つまり財評価の高い入札者ほど高い指値をするならば、効率的配分が達成されることになる。つまり、任意のタイププロファイル $\omega \in \Omega$ について、

$$s_i(\omega_i) > s_j(\omega_j) \quad \text{if } \omega_i > \omega_j$$

がみたされるならば、効率的配分を達成することになる。このような戦略プロファイル s は「対称的」、すなわち

$$s_i(\omega_i) = s_j(\omega_j) \quad \text{if } \omega_i = \omega_j,$$

⁴ ただし、この簡素化は、財評価の集合が離散になるケースの分析には不向きである。別の簡素化として、評価関数 v_i を一般的に定義し、事前分布を一様分布に限定する仕方がある。

⁵ 私的価値がみだされない場合、二位価格入札とせり上げオークションは、特に厳密に区別されなければならない。回を改めて詳しく解説する。

および、各入札者 i について「単調増加」、すなわち

$$s_i(\omega_i) > s_i(\omega'_i) \quad \text{if } \omega_i > \omega'_i$$

をみたしている。よって、効率的配分がかならず達成されることを示すには、対称的かつ単調増加である戦略プロファイルが存在して、なんらかの均衡条件をみたしていることを示せばよいことになる。

3. 二位価格入札

二位価格入札において、落札者は、自身の指値でなく、自分以外の入札者（非落札者）の中での最高指値を支払う。つまり、支払ルール x は、任意の行動プロファイル m および任意の入札者 i について、

$$x_i(m) = \max_{j \neq i} m_j \quad \text{if } g(m) = i$$

と特定される。よって、各タイプ ω_i の入札者 i の利得は、

$$U_i(g(m), x_i(m), \omega_i) = \omega_i - \max_{j \neq i} m_j \quad \text{if } g(m) = i$$

$$U_i(g(m), x_i(m), \omega_i) = 0 \quad \text{if } g(m) \neq i$$

になる。

3.1. 優位戦略

各入札者 i の「正直戦略」を、 s_i^* と記し、

$$s_i^*(\omega_i) = \omega_i \quad \text{for all } \omega_i \in \Omega_i$$

と定義する。二位価格入札の重要な特徴は、各入札者 i にとって、正直に指値を申告すること、つまり正直戦略 s_i^* をプレイすることが優位戦略になることである。

定理 5-1 : 私的価値の仮定下で、二位価格入札において、各入札者 $i \in N$ の正直戦略 s_i^* は優位戦略になる、つまり、任意のタイプ $\omega_i \in \Omega_i$ および行動プロファイル $m = (m_i, m_{-i}) \in M$ について、

$$U_i(g(\omega_i, m_{-i}), x_i(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) \geq U_i(g(m), x_i(m), \omega_i)$$

が成立する。

証明 : 任意の $\omega_i \in \Omega_i$ および任意の $m \in M$ について、

$$U_i(g(m), x_i(m), \omega_i) = \text{either } 0 \text{ or } \omega_i - \max_{j \neq i} m_j,$$

すなわち

$$U_i(g(m), x_i(m), \omega_i) \leq \max[0, \omega_i - \max_{j \neq i} m_j]$$

が成立する。正直に申告した場合、つまり、 $m_i = \omega_i$ の場合を、以下のように考察する。もし財が入札者 i に落札される、つまり $g(\omega_i, m_{-i}) = i$ であるならば、 $\omega_i = m_i \geq \max_{j \neq i} m_j$ が成り立つから、

$$U_i(g(\omega_i, m_{-i}), x_i(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) = \omega_i - \max_{j \neq i} m_j \geq 0$$

である。一方、財が入札者 i に落札されない、つまり $g(\omega_i, m_{-i}) \neq i$ であるならば、 $\omega_i = m_i \leq \max_{j \neq i} m_j$ が成り立つから、

$$U_i(g(\omega_i, m_{-i}), x_i(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) = 0 \geq \omega_i - \max_{j \neq i} m_j$$

である。よって、正直に申告した場合にはかならず

$$U_i(g(\omega_i, m_{-i}), x_i(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) = \max[0, \omega_i - \max_{j \neq i} m_j]$$

が成立する。以上より、任意の $\omega_i \in \Omega_i$ および任意の $m \in M$ について、

$$U_i(g(\omega_i, m_{-i}), x_i(\omega_i, m_{-i}), \omega_i) \geq U_i(g(m), x_i(m), \omega_i)$$

が成立することになるが、これは正直戦略が優位戦略であることを意味する。

Q.E.D.

優位戦略は強い制約を課す均衡概念であるから、正直戦略プロファイル $s^* = (s_i^*)_{i \in N}$ は、二位価格入札において、事後均衡、ベイジアンナッシュ均衡のいずれの均衡の条件もみたすことになる。正直戦略プロファイルは対称的でありかつ単調増加であるから、二位価格入札では、正直戦略プロファイルが優位戦略プロファイルとしてプレイされることによって、かならず効率的配分が達成される。

3.2. 内部化

定理 5 – 1 の証明をかみ砕いて、なぜ二位価格入札において、正直戦略が優位戦略になるのかをくわしく検討しよう。

入札者 i は、正直戦略をプレイして財を落札した場合、非落札者の中での最高指値 $\max_{j \neq i} m_j$ を支払う。入札者 i が財を落札すると、残り $n-1$ 人は財を獲得できなくなる。よって、 $\max_{j \neq i} m_j$ は、「入札者 i が財を落札することで残り $n-1$ 人が被る損失分」になる。この損失分は、入札者 i が財を落札することによって生じる（負の）「外部効果」である。よって、二位価格入札は、落札者に、財を落札することで残り $n-1$ 人が被る損失分を支払わせることによって、外部効果を「内部化」していることになる。

この内部化のため、各入札者にとって、自身の財評価が残り $n-1$ 人によって申告された損失分 $\max_{j \neq i} m_j$ より高い（より低い）場合、財を獲得するのが得（損）になる。よって、各入札者は、自身の指値を正直に申告すれば、期待利得をもっとも高める落札パターンを実現できることになる。

このような二位価格入札における内部化がうまく機能するためには、私的価値の仮定が不可欠である。私的価値が仮定されないならば、各入札者は、正直戦略をプレイするインセンティブをもちやもたなくなる。

私的価値の仮定が成り立たないために、ある入札者が他の入札者の財評価について何らかの私的情報を持つことになれば、その入札者は、虚偽申告をす

ることによって、「他の入札者の損失分はそれほど大きい値ではない」といった、嘘のメッセージをせり人に送ることができる。このように虚偽の申告をすることで、支払い負担を軽減し、落札の可能性をも高めようとする戦略的操作が可能になるので、効率的配分は達成できなくなる。

3.3. 期待収入、期待利得、期待支払額

二位価格入札において正直戦略プロファイル s^* がプレイされることで、売り手は、任意のタイププロファイル $\omega \in \Omega$ において、収入

$$\min_{i \in N} [\max_{j \neq i} \omega_j]$$

を獲得することになる。一番高いタイプに落札されるので、落札者の支払額、すなわち売り手の収入は、 $n-1$ 人の入札者の中での最高指値の「最低値」、すなわち、 $\min_{i \in N} [\max_{j \neq i} \omega_j]$ に一致することになる。

共通事前分布 $P: \Omega \rightarrow [0,1]$ を導入することで、売り手の期待収入は

$$E[\min_{i \in N} [\max_{j \neq i} \omega_j]]$$

とあらわされる。($E[\cdot]$ は、共通事前分布 P にもとづく期待値オペレーターであり、 $P(\omega)$ は、タイププロファイルが ω 以下である確率である。) さらに、分布独立性、つまり、任意の入札者 $i \in N$ について、確率分布関数 P_i が存在して、

$$P(\omega) = \prod_{i \in N} P_i(\omega_i) \quad \text{for all } \omega \in \Omega$$

が成立することを仮定する。($P_i(\omega_i)$ は、入札者 i のタイプが ω_i 以下である確率である。) 正直戦略プロファイル s^* がプレイされる場合、他の入札者の最高指値が $b \in [0,1]$ 以下である確率は

$$H_i(b) \equiv \prod_{j \neq i} P_j(b),$$

その確率密度は $h_i(b) \equiv \frac{d}{db} H_i(b)$ とあらわされる。

タイプ ω_i の入札者 i が落札する確率は、 $H_i(\omega_i)$ と一致する。また、タイプ ω_i の入札者 i が落札し、 ω_i 以下の任意の価格 b を支払う確率密度は、 $h_i(b)$ と一致する。よって、タイプ ω_i の入札者 i の期待支払額は

$$\int_{b=0}^{\omega_i} bh_i(b)db,$$

入札者 i の（事前の）期待支払額は

$$\int_{\omega_i=0}^1 \left\{ \int_{b=0}^{\omega_i} bh_i(b)db \right\} p_i(\omega_i) d\omega_i$$

になる。

入札者の支払額は売り手の収入に他ならないので、売り手の期待収入は、各入札者の期待支払額の総和であり、

$$\sum_{i \in N} \int_{\omega_i=0}^1 \left\{ \int_{b=0}^{\omega_i} bh_i(b)db \right\} p_i(\omega_i) d\omega_i$$

になる。この値は、前述した $E[\min_{i \in N} [\max_{j \neq i} \omega_j]]$ に等しい。さらに、入札者のリスク

中立性を仮定することによって、タイプ ω_i の入札者 i の期待利得は

$$\omega_i H_i(\omega_i) - \int_{b=0}^{\omega_i} bh_i(b)db$$

になる。

4. 一位価格入札

一方、一位価格入札では、落札者は自身の指値を支払う。つまり、支払ルール x_i は、任意の行動プロファイル m および任意の入札者 i について、

$$x_i(m) = m_i \quad \text{if } g(m) = i$$

と特定される。よって、各タイプ ω_i における利得は、

$$U_i(g(m), x_i(m), \omega_i) = \omega_i - m_i \quad \text{if } g(m) = i$$

$$U_i(g(m), x_i(m), \omega_i) = 0 \quad \text{if } g(m) \neq i$$

になる。

一位価格入札においては、各入札者は、正直戦略をプレイするインセンティブをもたない。落札しても、自身の財評価と同額を支払うので、利得はゼロになってしまうからだ。よって、各入札者は、自身の財評価より低く指値することになる。

4.1. ベイジアンナッシュ均衡

一位価格入札においては、優位戦略が存在しない。そのため、各入札者は、指値を財評価よりどの程度低くするかを決める際に、他の入札者の指値について予想を立てる必要がある。各入札者が他の入札者の指値をどのように予想するかは、他の入札者のタイプをどのように予想するかに依存する。そのため、前回解説した「信念」を導入することが適切であり、よって、一位価格入札はベイジアンナッシュ均衡によって分析されることになる。

一位価格入札の分析全体を通じて、私的価値のみならず、リスク中立性および分布独立性の仮定が必要となる。一位価格入札のベイジアンナッシュ均衡分析は、これらを全て仮定しても、二位価格入札ほど簡単にはならない。ただし、「分布対称性」が仮定されるケースと、そうでないケースに分けて考察すると、分析がかなりわかりやすくなる。

分布対称性とは、各入札者のタイプが同一形状の分布にしたがっていることを仮定する条件である。

分布対称性：任意の $i \in N$ 、 $\omega_i \in \Omega_i$ 、および $\omega_1 \in \Omega_1$ について、

$$P_i(\omega_i) = P_1(\omega_1) \quad \text{if } \omega_i = \omega_1$$

が成立する。

以下に示されるように、分布対称性下では、対称的かつ単調増加なベイジアンナッシュ均衡が存在する。そのため、二位価格入札同様、効率的配分が達

成できる。しかも、一位価格入札において、効率的配分を達成するベイジアンナッシュ均衡は、二位価格入札における正直戦略と同じ期待収入、期待支払額、期待利得をもたらす。

一方、分布対称性がみだされない場合には、対称的かつ単調増加なベイジアンナッシュ均衡は存在しない。そのため、効率的配分はもはや達成されず、概して二位価格入札とはことなる期待収入、期待支払額、期待利得がもたらされる。以下に、このことを確かめよう。

4.2. 分布対称性

プレイされる戦略プロファイル $s \in S$ が、対称的かつ単調増加である場合、各タイプ ω_i の入札者 i の落札確率は、3.3 節で定義された $H_i(\omega_i)$ に一致することになり、期待支払額は

$$s_i(\omega_i)H_i(\omega_i)$$

になる。

対称的かつ単調増加である戦略プロファイル $s^{**} \in S$ を、以下のように特定する。任意のタイプ ω_i の入札者 i について、期待支払額 $s_i^{**}(\omega_i)H_i(\omega_i)$ が、二位

価格入札の期待支払額 $\int_{b=0}^{\omega_i} bh_i(b)db$ に一致するように、 $s_i^{**}(\omega_i)$ を特定する、すなわ

ち

$$s_i^{**}(\omega_i) \equiv \frac{\int_{b=0}^{\omega_i} bh_i(b)db}{H_i(\omega_i)} \quad \text{for all } \omega_i \in \Omega_i$$

とする。つまり、指値 $s_i^{**}(\omega_i)$ は、二位価格入札における落札時の支払額の条件付き期待値に等しい。さらに、分布対称性より、

$$H_i(b) = P_1(b)^{n-1} \text{ および } h_i(b) = (n-1)p_1(b)P_1(b)^{n-2}$$

であるため、

$$s_i^{**}(\omega_i) = \frac{(n-1) \int_{b=0}^{\omega_i} b p_1(b) P_1(b)^{n-2} db}{P_i(\omega_i)^{n-1}}$$

となる。($p_i(b) \equiv \frac{dP_i(b)}{db}$ とする。) 以下の定理は、このように特定した戦略プロフィール s^{**} がベイジアンナッシュ均衡になることを示している。

定理 5-2 : 分布対称性下の一位価格入札において、戦略プロフィール s^{**} はベイジアンナッシュ均衡である。

証明 : タイプ ω_i の入札者 i が、 $s_i^{**}(\mathbf{1})$ より高い指値をするメリットはない。なぜなら、かわりに $s_i^{**}(\mathbf{1})$ を指値することで、確実に落札者になれるし、しかもより低い支払額ですむからだ。

$s_i^{**}(\mathbf{1})$ 以下の指値をする場合は、その指値と $s_i^{**}(\omega'_i)$ が一致するあるタイプ $\omega'_i \in \Omega_i$ が必ず存在する。タイプ ω_i の入札者 i は、タイプ ω'_i とうそぶいて $s_i^{**}(\omega'_i)$ を指値していることになる。この場合、落札確率は $H_i(\omega'_i)$ になり、期待利得は

$$\{\omega_i - s_i^{**}(\omega'_i)\} H_i(\omega'_i) = \omega_i H_i(\omega'_i) - \int_{b=0}^{\omega'_i} b h_i(b) db$$

となるが、これは二位価格入札においてタイプ ω_i の入札者 i がタイプ ω'_i とうそについて申告した時の期待利得と同じである。二位価格入札においては、正直戦略が優位戦略であるため、タイプ ω'_i とうそについて申告するインセンティブはないから、一位価格入札においても、 $s_i^{**}(\omega'_i)$ を指値するインセンティブはない。

Q.E.D.

分布対称性の下では、 $s_i^{**}(\omega_i)$ 、つまり二位価格入札において落札する際の支払額の期待値、を指値することが、対称的かつ単調増加なベイジアンナッシュ均衡になるので、効率的配分を達成できる。同時に、二位価格入札と同じ期待支払額、期待利得、期待収入がもたらされる。

4.3. 分布非対称性

前節において、分布対称性下で、効率的配分の達成および二位価格入札との同値性が示された。しかし、分布対称性がみだされない場合には、これらの性質はもはや成り立たない。

議論を単純化するため、入札者は二人としよう ($n=2$)⁶。分布が非対称的であることから、ある $b \in [0,1]$ が存在して、不等号

$$\frac{p_1(b)}{P_1(b)} \neq \frac{p_2(b)}{P_2(b)}$$

が成り立つと仮定できる。この場合、対称的かつ単調増加であるどの戦略プロファイル $s \in S$ も、ベイジアンナッシュ均衡になりえないことが、以下のように示される。

タイプ ω_i の入札者 $i \in \{1,2\}$ が指値 $m_i = s_i(\omega'_i)$ をした場合の落札確率は $H_i(\omega'_i) = P_j(\omega'_i)$ 、つまり相手入札者 $j \neq i$ のタイプ ω_j が ω'_i 以下である確率に等しい。よって、期待利得は

$$\{\omega_i - s_i(\omega'_i)\} P_j(\omega'_i)$$

になる。期待利得が $\omega'_i = \omega_i$ (つまり $m_i = s_i(\omega_i)$) において最大化されるならば、一階条件より

$$\left. \frac{\partial}{\partial \omega'_i} \{\omega_i - s_i(\omega'_i)\} P_j(\omega'_i) \right|_{\omega'_i = \omega_i} = 0、$$

すなわち

$$\frac{s'_i(\omega_i)}{\omega_i - s_i(\omega_i)} = \frac{p_j(\omega_i)}{P_j(\omega_i)}$$

が成立することになる。

戦略プロファイル s が対称的かつ単調増加であるならば、任意の $b \in [0,1]$ について等式

⁶ 三人以上のケースでも同様の議論が成り立つ。

$$\frac{s_1'(b)}{b-s_1(b)} = \frac{s_2'(b)}{b-s_2(b)}$$

が成り立つことになる。このことは同時に、一階条件より、等式

$$\frac{p_1(b)}{P_1(b)} = \frac{p_2(b)}{P_2(b)}$$

が成立することを意味する。しかし、これは分布非対称性の仮定と矛盾する。以上より、対称的かつ単調増加である戦略プロファイルはベイジアンナッシュ均衡になりえないことが示された。

4.4. 弱い立場と強い立場

分布が低いタイプに偏っている入札者を「弱い立場」、高いタイプに偏っている入札者を「強い立場」と呼ぶことにしよう。例えば、任意の $b \in [0,1]$ について、不等式

$$\frac{p_1(b)}{P_1(b)} < \frac{p_2(b)}{P_2(b)}$$

が成り立つならば、入札者 1 を弱い立場、入札者 2 を強い立場とみなすことが妥当である。この不等式は、任意の $b \in [0,1]$ について、タイプが b 以下であることが分かっている時に、入札者 1 がこの範囲内で最も高いタイプ $\omega_1 = b$ である条件付き確率密度（逆ハザード率と呼ばれる） $\frac{p_1(b)}{P_1(b)}$ が、入札者 2 の条件付き確率

密度 $\frac{p_2(b)}{P_2(b)}$ よりも低いことを意味している。このことは、入札者 2 の方が入札者

1 よりも高いタイプである確率が常に高いことを示唆している。よって、入札者 1 を弱い立場、入札者 2 を強い立場とみなしてよい。

重要な性質として、弱い立場の入札者 1 の方が、強い立場の入札者 2 より強気の指値（高い指値）をする傾向にあることが、以下のように示される。任意の対称的かつ単調増加である戦略プロファイル $s \in S$ を考えると、

$$\frac{s'_1(b)}{b-s_1(b)} = \frac{s'_2(b)}{b-s_2(b)}$$

であるから、不等式 $\frac{p_1(b)}{P_1(b)} < \frac{p_2(b)}{P_2(b)}$ より、

$$\frac{s'_1(b)}{b-s_1(b)} < \frac{p_2(b)}{P_2(b)} \text{ あるいは } \frac{s'_2(b)}{b-s_2(b)} > \frac{p_1(b)}{P_1(b)}$$

のどちらかが成り立つことになる。左の不等式であれば、タイプ $\omega_1 = b$ の入札者 1 は指値を $s_1(b)$ ($= s_2(b)$) より低くすることで利得を高めることができる。右の不等式であれば、同じタイプ $\omega_2 = b$ の入札者 2 は指値を $s_2(b)$ ($= s_1(b)$) より高くすることで利得を高めることができる。このことは、たとえ同じタイプであっても、弱い立場の入札者は強い立場の入札者よりも高めに指値をする傾向にあることを示唆する。

弱い立場の入札者は、実際には相手より低いタイプであったとしても、強気の指値をするので、財を落札できるかもしれない。このことは、分布非対称性下の一位価格入札では、効率的配分が達成されないことを意味する。

5. 一位価格入札と二位価格入札の比較：まとめ

二位価格入札では正直戦略が優位戦略になる。しかし、一位価格入札では、正直戦略は、優位戦略はおろかベイジアンナッシュ均衡にもならない。一位価格入札における任意のベイジアンナッシュ均衡では、入札者は、自身の財評価よりも低い指値をする。

二位価格入札では、分布対称性の有無を問わず、効率的配分が達成される。しかし、一位価格入札は、分布対称性下では効率的配分を達成するものの、分布非対称性下では効率的配分を達成しない。

分布非対称性下での一位価格入札では、弱い立場の入札者が強気の指値をするため、弱い立場の入札者に優先的に落札される傾向がある。この傾向が顕

著である場合には、二位価格入札よりも、非効率的な一位価格入札の方が、より高い期待収入を売り手にもたらす可能性が考えられる。

一位価格入札は、弱い立場の入札者に落札機会を提供するルールとみなすことができる。オークションの主催者が、効率的配分の達成よりも、売り手収入や参入促進などの別の目的を重視する場合には、二位価格入札よりも一位価格入札が好まれると考えられる⁷。

6. 同値定理：直観的説明

上述したように、分布対称性下では、二位価格入札と一位価格入札とは、期待支払額、期待利得、期待収入の値が一致する。実は、このように、オークションのルールに関係なく、期待支払額、期待利得、期待収入の値が定まる性質は、かなり一般的に成り立つことがわかっている。この性質は、オークション理論において（収入、支払い、あるいは利得）「同値定理」と呼ばれている。同値定理の厳密な説明は回を改めて詳しく紹介される予定である。以下には、その直観的説明を紹介する。

任意のオークションのルールにおいて、何らかのベイジアンナッシュ均衡がプレイされる状況を、暗黙に想定しよう。他の入札者はベイジアンナッシュ均衡をプレイするとして、任意のタイプ ω_i の入札者 i が、タイプ $\tilde{\omega}_i$ のふりをして入札した場合の落札確率を $L_i(\omega_i, \tilde{\omega}_i)$ 、期待支払額を $E[t_i | \omega_i, \tilde{\omega}_i]$ とあらわすことにする。ここで、 $E[t_i | 0] = 0$ を仮定する。

重要な仮定として、分布独立性がみたされるとする。分布独立性下では、落札確率および期待支払額は、真のタイプ ω_i から独立に定まる、つまり、

$$L_i(\tilde{\omega}_i) = L_i(\omega_i, \tilde{\omega}_i) \text{ および } E[t_i | \tilde{\omega}_i] = E[t_i | \omega_i, \tilde{\omega}_i]$$

とあらわされる。この場合、期待支払額 $E[t_i | \tilde{\omega}_i]$ は、落札確率 $L_i(\tilde{\omega}_i)$ のみによって、一意に確定されることが、以下のように示される。期待利得は

⁷ 分布非対称性下では一位価格入札の方が二位価格入札よりも期待収入が高くなる可能性については、Maskin and Riley (2000)を参照されたい。

$$\omega_i L_i(\tilde{\omega}_i) - E[t_i | \tilde{\omega}_i]$$

であるから、ベイジアンナッシュ均衡の一階条件は、

$$\left. \frac{\partial \{\omega_i L_i(\tilde{\omega}_i) - E[t_i | \tilde{\omega}_i]\}}{\partial \tilde{\omega}_i} \right|_{\tilde{\omega}_i = \omega_i} = 0 \quad \text{for all } \omega_i \in [0,1],$$

つまり

$$\frac{\partial E[t_i | \omega_i]}{\partial \omega_i} = \omega_i L_i'(\omega_i) \quad \text{for all } \omega_i \in [0,1]$$

になる。両辺を $\omega_i \in [0,1]$ について積分すれば、

$$E[t_i | \omega_i] = \int_{b=0}^{\omega_i} \omega_i L_i'(b) db + E[t_i | 0] = \int_{b=0}^{\omega_i} \omega_i L_i'(b) db$$

が導かれる。この等式は、期待支払額 $E[t_i | \tilde{\omega}_i]$ が、落札確率 $L_i(\tilde{\omega}_i)$ のみによって一意に確定されることを意味する。

ことなるオークションのルールとベイジアンナッシュ均衡が、任意のタイププロファイルについて、常に同じ配分をもたらすとしよう。このことは、任意のタイプの入札者について、同じ落札確率をもたらされることを意味する。上述した同値定理の直観的説明によれば、同じ落札確率をもたらされるならば、期待支払額、期待利得、期待収入のいずれについても、同じ値をもたらされることになる。よって、任意のタイププロファイルについて同じ配分をもたらすオークションのルールおよびベイジアンナッシュ均衡については、期待支払額、期待利得、期待収入のいずれもが同値になる。

同値定理はかなり一般的に成立する。複数種複数単位の財取引でも成立しうるし、私的価値を仮定する必要もない。しかし、分布独立性の仮定には強く依拠しており、また、タイプ集合が離散である場合には成立しない。

7. リスク態度

連載を通じて、断りのない限り、経済主体のリスク中立性が仮定される。この節では、経済主体がリスク回避的である場合に、一位価格入札および二位価格入札の分析結果がどのようにかわるかを、解説したい。

7.1. リスク回避的な入札者

まず、入札者がリスク回避的であるケースを考えよう。二位価格入札では、入札者のリスク態度に無関係に、正直戦略が優位戦略になる。よって、期待支払額および期待収入ともに、入札者のリスク態度には無関係である。

一方、一位価格入札では、入札者の行動はリスク態度に大いに関係する。リスク回避的な入札者は、リスク中立的な入札者よりも、指値を高くして、落札時の利得を低くしてでも落札確率を高めて、非落札リスクを回避しようとする。また、他のリスク回避的な入札者も同様に指値を高めると予想されることから、指値を一層高めて落札確率を維持しようとする。こうして、期待支払額および期待収入は、リスク中立的な場合より高くなる。

入札者がリスク中立的である場合には、分布対称性下では、一位価格入札と二位価格入札の期待収入は一致した。しかし、入札者がリスク回避的である場合には、一位価格入札の期待収入の方が二位価格入札の期待収入よりも高くなる⁸。したがって、分布対称性下でも、売り手は、一位価格入札を二位価格入札より好むことが考えられる。

ただし、入札者にとっては、一位価格入札が好ましいか、二位価格入札が好ましいかの判断は、ケースバイケースになる。一位価格入札の方が期待支払額が高くなるので、その点においては不利である。しかし、一位価格入札における落札価格は常に自身の指値に一致しており一定であるのに対して、二位価格入札における落札価格は非落札者の指値に応じて変動する。よって、一位価格入札の方が、落札価格の変動リスクが小さい。このように、一位価格入札、

⁸ 関連する文献として、Holt (1980)などがある。

二位価格入札ともに、有利不利があるので、リスク回避的な入札者にとってどちらがいいとは一概に言えない。

7.2. リスク回避的な売り手

入札者はリスク中立的であるとして、今度は、売り手のリスク態度の視点から、一位価格入札と二位価格入札を比較してみよう。

既に言及したとおり、一位価格入札の方が二位価格入札よりも、落札価格がより安定的である。例えば、分布対称性を仮定すると、任意のタイプ ω_i の入札者 i は、一位価格入札、二位価格入札ともに、同確率 $H_i(\omega_i)$ で財を落札することになる。また、任意のタイプ ω_i の入札者 i が落札した場合の期待支払額はとも

に
$$\frac{\int_{b=0}^{\omega_i} bh_i(b)db}{H_i(\omega_i)}$$
 と一致する。

一位価格入札の場合、実際の支払い額は常にこの額に等しい。しかし、二位価格入札の場合は、非落札者の最高指値に応じて変動するので、売り手収入にはリスクが伴うことになる。そのため、分布対称性下でも、リスク回避的な売り手にとって、一位価格入札と二位価格入札はもはや無差別ではなく、一位価格入札の方がより好ましい。

8. 次回の予告

今回は、単一種一単位の財取引について、私的価値や分布独立性などの仮定の下で、一位価格入札、二位価格入札といった標準的なオークションのルールを均衡分析した。そして、効率的配分が達成される可能性、さらに、期待利得、期待支払額、期待収入について、ルール間で同値になる可能性について解説した。次回および次々回は、より一般的なメカニズムデザインの問題につい

て、効率的配分の達成や、ルール間の同値性が、どのような条件下で成立するかを解説する。

参考文献

- Holt (1980): “Competitive Bidding for Contracts under Alternative Auction Procedures,” *Journal of Political Economy* 88, 433-445.
- Krishna, V. (2010): *Auction Theory*, Academic Press.
- Maskin, E. and J. Riley (2000): “Asymmetric Auctions,” *Review of Economic Studies* 67, 413-438.
- Saitoh, H. and S. Serizawa. (2008): “Vickrey Allocation Rule with Income Effect,” *Economic Theory* 35, 391-401.
- Sakai, T. (2012): “An equity characterization of second price auctions when preferences may not be quasilinear,” forthcoming in *Review of Economic Design*.
- Vickrey, W. (1961): “Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders,” *Journal of Finance* 16, 8-37.