2013 年 **8** 月 **30** 日

経済セミナー **2013** 年 **10, 11** 月号

「オークションとマーケットデザイン」第 **7** 回

効率的配分とグローブスメカニズム

松島斉

東京大学経済学研究科教授

入札者が正直にタイプを表明する、誘因整合性をみたし、かつ効率的配分を達成するメカニズムは一般的に存在しうるか。もし存在するならば、それはどのように設計されるか。それはどのような期待収入をもたらすか。

今回は、私的価値の仮定下で、一般的な配分問題について、誘因整合的かつ効率的な、封印型の直接メカニズムの設計方法について解説する。正直にタイプを表明することが優位戦略になることを要求する「優位戦略誘因整合性」をみたす、効率的メカニズムの代表的設計方法である、「グローブスメカニズム（Groves Mechanism）」を紹介する。

さらに、グローブスメカニズムの特殊ケースとして、「ＶＣＧメカニズム」を紹介する。ＶＣＧメカニズムは、二位価格入札の基本概念を一般的な配分問題に拡張した設計方法である。具体的な問題を検討することによって、ＶＣＧメカニズムがどのような設計上の特徴を持つかを解説する。さらに、ＶＣＧメカニズムと同じ配分と支払をもたらす、公開型のオークションルールにはどのようなものがあるかについても解説する[1]。

---

[1] 今回の内容を補助する文献として、Milgrom (2004, Chapter 2), Mas-Colell, Whinston, and Green (1995, Chapters 11 and 23) , Fudenberg and Tirole (1993, Chapter 7)などがある。

１．グローブスメカニズム

準線形性 (Quasi-Linearity) と私的価値 (Private Values) の仮定下で、効率的な直接メカニズム (Efficient Direct Mechanism) の設計方法を解説する。連載第６回にしたがって、直接メカニズムは、配分ルールと支払ルールの組み合わせ (g,x) として、

$$g: M \to A、\ x = (x_i)_{i \in N}、\ x_i : \Omega \to R$$

と定義される。直接メカニズムにおける各プレーヤー（入札者）$i \in N$ のメッセージ集合は、自身のタイプ集合 Ω_i と同じとされる。各プレーヤー $i \in N$ は、仲介者（Mediator）および他のプレーヤーに対して、自身のタイプがどれであるかを同時に、直接的に表明する。仲介者は、表明されたタイププロファイル $\omega = (\omega_i)_{i \in N}$ にもとづいて、配分 $g(\omega) \in A$ を選択し、各プレーヤー i に $x_i(\omega) \in R$ の支払いを要求する。

連載第６回で説明された「表明原理」によると、我々は、直接メカニズム以外のメカニズムを検討しても、直接メカニズムと実質的にことなる配分と支払いは達成される可能性は期待できない。そのため、一般性を失うことなく、直接メカニズムだけを検討すればよい。

１．１．優位戦略誘因整合性と効率性

直接メカニズムに対して、優位戦略誘因整合性（Incentive Compatiblity in Dominant Strategies, DIC）、つまり、各プレーヤーにとって、正直なタイプ表明が優位戦略になることを要求する。すなわち、任意の $i \in N$, および $\omega \in \Omega$ について、

（１）
$$v_i(g(\omega),\omega_i) - x_i(\omega) \geq v_i(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i) - x_i(\omega_i',\omega_{-i}) \quad \text{for all} \quad \omega_i' \in \Omega_i$$

を要求する。さらに、配分ルールが効率的であること、つまり、任意のタイププロファイル$\omega \in \Omega$について、全プレーヤーの価値評価総額が最大化されていることを意味する不等式

$$\sum_{i \in N} v_i(g(\omega), \omega_i) \geq \sum_{i \in N} v_i(a, \omega_i) \quad \text{for all} \quad a \in A$$

を要求する。

１．２．グローブスメカニズムの定義

効率性と優位戦略誘因整合性をみたす代表的な直接メカニズムは、「グローブスメカニズム」である。効率的な直接メカニズム(g, x)は、支払ルールxが以下の条件をみたす時、グローブスメカニズムと呼ばれる。すなわち、各プレーヤー$i \in N$の支払関数$x_i : \Omega \to R$について、ある関数$h_i : \Omega_{-i} \to R$が存在して、

$$x_i(\omega) = -\sum_{j \neq i} v_j(g(\omega), \omega_j) + h_i(\omega_{-i}) \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega$$

が成立するという条件である。

グローブスメカニズムにおける支払関数の設計の仕方は、以下の意味合いをもつ。まず、仲介者は、各プレーヤー$i \in N$に対して、表明されたタイププロファイル$\omega \in \Omega$にもとづいて、他のプレーヤーの価値評価総額$\sum_{j \neq i} v_j(g(\omega), \omega_j)$を支払う。さらに、仲介者は、各プレーヤー$i$に対して、$h_i(\omega_{-i})$の支払いを要求することによって、支出$\sum_{j \neq i} v_j(g(\omega), \omega_j)$の穴埋めをすると同時に、収入を得る。

グローブスメカニズムは、私的価値の仮定下で、一般的な効率的配分問題を解決させることができる。この連載では概して私的財の配分問題を扱うことになるが、公共財の効率的供給（配分）問題においても、グローブスメカニズムは中心的役割を担う[2]。

[2] Fudenberg and Tirole (1993, Chapter 7).

１．３．グローブスメカニズムと優位戦略誘因整合性

グローブスメカニズムにおける支払関数の設定の重要ポイントは、支払要求$h_i(\omega_{-i})$はω_iに依存させないことである。このため、$h_i(\omega_{-i})$の支払い要求は、プレーヤーiのインセンティブに影響を与えない。よって、タイプω_i'のプレーヤーiは、表明されたタイププロファイルωにおける効率的配分がもたらす、全プレーヤーの価値評価総額$v_i(g(\omega),\omega_i')+\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega),\omega_j)$を最大にするように、タイプ$\omega_i$を表明することになる。

配分ルールの効率性から、

$$v_i(g(\omega_i',\omega),\omega_i')+\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega_i',\omega),\omega_j) \geq v_i(a,\omega_i')+\sum_{j\neq i} v_j(a,\omega_j)$$

for all $a \in A$

が成立する。よって、自動的に、

$$v_i(g(\omega_i',\omega),\omega_i')+\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega_i',\omega),\omega_j) \geq v_i(g(\omega),\omega_i')+\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega),\omega_j)$$

for all $\omega_i \in \Omega_i$

が成立することになる。これは、優位戦略誘因整合性を意味する。よって、グローブスメカニズムが優位戦略誘因整合性をみたすことが証明された。

定理 7-1：任意のグローブスメカニズムは、優位戦略誘因整合性をみたす。

正直に真のタイプω_i'を表明した場合、自身の価値評価$v_i(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i')$と仲介者から支払われる$\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_j)$を足し合わせた額は、表明されたタイププロファイル$(\omega_i',\omega_{-i})$における効率的配分がもたらす、全プレーヤーの価値評価総額$v_i(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_i')+\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega_j)$に相当する。一方、嘘のタイプ$\omega_i \neq \omega_i'$を表明した場合、自身の価値評価と仲介者から支払われる額を足し合わせた額は、真の効率的配分$g(\omega_i',\omega_{-i})$とは別の配分$g(\omega)$がもたらす、全プレーヤーの価値評

価総額に等しい。これは正直に表明をした際の値よりも低い。このことが、グローブスメカニズムにおいて、各プレーヤーが正直にタイプを表明するインセンティブをもつための原動力になっている。

他のプレーヤーの価値評価総額が支払われることによって、タイプ表明が配分決定にもたらす外部効果が、「内部化」されることになる。この内部化作用が、プレーヤーに正直にタイプを表明するインセンティブをもたらしている。

ただし、私的価値が成り立たない場合には、各プレーヤーiに、表明されたタイププロファイルωにおける他のプレーヤーの価値評価総額$\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega),\omega)$を支払う、上述したルール設計では、外部効果を適切に内部化することができない。プレーヤーiのタイプ表明ω_iは、配分$g(\omega)$のみならず、仲介者が想定する他のプレーヤーの評価関数の形状$v_j(\cdot,\omega)$にも影響を与える。そのため、各プレーヤーには、他のプレーヤーの評価関数の形状を偽って仲介者に伝えることによって、利益を高めようとするインセンティブが働いてしまう。

ＶＣＧメカニズムおける内部化は、連載第 5 回第 3.2 節で説明された二位価格入札における内部化と酷似している。実際、後述するように、ＶＣＧメカニズムは、二位価格入札を一般化した設計方法ととらえることができる。

タイプ集合が十分に広くとられる場合には、グローブスメカニズム以外に、優位戦略誘因整合的かつ効率的な直接メカニズムは、もはや存在しないことが証明できる（証明は省略する）。

定理 7-2 : 任意の関数$\xi : A \to R$、および任意の$i \in N$について、あるタイプ$\omega_i \in \Omega_i$が存在して、

$$v_i(a,\omega_i) = \eta(a) \quad \text{for all} \quad a \in A$$

が成立するとする。この時、優位戦略誘因整合性および効率性をみたす任意の直接メカニズムはグローブスメカニズムである[3]。

[3] Green and Laffont (1977)を参照せよ。

１．４．ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性と同値定理

優位戦略誘因整合性の代わりに、より弱いベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性（Bayesian Incentive Compatibility, BIC）を要求することによって、グローブスメカニズム以外に、どのような効率的直接メカニズムが存在するかを検討しよう。重要な論点は、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性に置き換えることで、効率的配分を達成しつつも、グローブスメカニズムでは実現できないような、より高水準の期待収入を売り手（仲介者）にもたらすことができるかどうか、である。

分布独立性（Independent Type Distributions）およびリスク中立性（Risk Neutrality）の仮定下では、グローブスメカニズムと異なる期待収入をもたらすメカニズムは存在しない、ということが、連載第６回において解説された「同値定理」を使って、証明することができる。

定理 7-3 : 準線形性、私的価値、リスク中立性、および分布独立性の仮定下では、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性をみたす、任意の効率的な直接メカニズムに対して、それと同じ期待収入、期待支払額、期待利得をもたらすグローブスメカニズムが必ず存在する。

証明：任意のグローブスメカニズムは、効率的でありかつベイジアン・ナッシュ均衡誘因両立性をみたす。任意のベイジアン・ナッシュ均衡誘因両立性をみたす効率的直接メカニズム(g,x)に対して、グローブスメカニズム$(g,\hat{x})$を以下のように特定する。つまり、各プレーヤー$i\in N$について、任意のタイプω_i^0を固定して、

$$E[h_i(\omega_{-i})]=E[x_i(\omega_i^0,\omega_{-i})\,|\,\omega_i^0]+E[\sum_{j\neq i}v_j(g(\omega_i^0,\omega_{-i}),\omega_j)\,|\,\omega_i^0]$$

が成立するように、h_iを特定する。$(g,\hat{x})$におけるタイプω_i^0の期待利得は(g,x)におけるそれと同じである。このことと、配分ルールが同じであることから、連

載第６回で説明された同値定理にしたがって、特定されたグローブスメカニズム$(g,\hat{x})$は、(g,x)と同じ期待収入、期待支払額、期待利得をもたらすことが示される。

Q.E.D.

優位戦略誘因整合性をベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性に弱めたとしても、グローブスメカニズムと実質的にことなる効率的なメカニズムは存在しない。したがって、期待収入、期待支払額、期待利得に関しては、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性の範囲内で様々なメカニズムデザインを考慮できるとしても、グローブスメカニズムだけを分析すれば事足りるのである。

定理 7-3 は、もし売り手（仲介者）が、グローブスメカニズム以外のメカニズムを設計して、期待収入を高めようとするならば、配分ルール自体を効率的なものからそうでないものに変更する必要性があることを示唆する。売り手が効率性ではなく収入最大化をもくろむ状況の分析については、次回に詳しく解説する。

２．ＶＣＧメカニズム

任意の$i \in N$について、関数$h_i(\cdot)$を

$$h_i(\omega_{-i}) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) \quad \text{for all} \quad \omega_{-i} \in \Omega_{-i}$$

と特定化した場合のグローブスメカニズム(g,x)は、「ＶＣＧメカニズム（Vickrey-Clarke-Groves mechanism）」と呼ばれる[4]。ＶＣＧメカニズムにおいて、各プレーヤー$i \in N$の支払い額は、

$$x_i(\omega) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) - \sum_{j \neq i} v_j(g(\omega), \omega_j)$$

になる。ここで、$\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j)$は、プレーヤー$i$が参加しない時の、他のプレーヤーにとって効率的な配分がもたらす、他のプレーヤーの価値評価総額をあ

[4] Vickrey (1961), Clarke (1971), および Groves (1973) を参照せよ。

らわす。また、$\sum_{j\neq i} v_j(g(\omega),\omega_j)$は、プレーヤー$i$が参加した時の、全プレーヤーにとって効率的な配分がもたらす、他のプレーヤーの価値評価総額をあらわす。よって、ＶＣＧメカニズムにおけるプレーヤーiの支払額$x_i(\omega)$は、プレーヤーiが参加したことによって他のプレーヤーが被る損失分に相当する。

ＶＣＧメカニズムがもたらすプレーヤーiの利得は、

$$\begin{aligned} & v_i(g(\omega),\omega_i)-x_i(\omega) \\ &= v_i(g^*(\omega),\omega_i)-\{\max_{a\in A}\sum_{j\neq i} v_j(a,\omega_j)-\sum_{j\neq i} v_j(g^*(\omega),\omega_j)\} \\ &= \max_{a\in A}\sum_{j\in N} v_j(a,\omega_j)-\max_{a\in A}\sum_{j\neq i} v_j(a,\omega_j) \end{aligned}$$

となる。ここで、$\max_{a\in A}\sum_{j\in N} v_j(a,\omega_j)$は、全プレーヤーにとって効率的な配分がもたらす、全プレーヤーの価値評価総額である。また、$\max_{a\in A}\sum_{j\neq i} v_j(a,\omega_j)$は、上述したように、プレーヤー$i$が参加しない時の、他のプレーヤーにとって効率的な配分がもたらす、他のプレーヤーの価値評価総額をあらわす。よって、差額$\max_{a\in A}\sum_{j\in N} v_j(a,\omega_j)-\max_{a\in A}\sum_{j\neq i} v_j(a,\omega_j)$は､プレーヤー$i$が参加することによって新たに生み出される価値の増加分に相当する。

この増加分を、プレーヤーiの「限界貢献度（Marginal Contribution）」と呼ぶことにする。よって、ＶＣＧメカニズムにおいて、各プレーヤーは、自身の限界貢献度を利得として獲得することになる[5]。

３．ＶＣＧメカニズムの例

具体的な取引問題を分析することによって、ＶＣＧメカニズムがどのような設計上の特徴をもつか、どのようなオークションルールに対応しているか、などを詳しく考察しよう。

---

[5]ＶＣＧメカニズムにおけるプレーヤー間の利得配分が、限界貢献度に基づく公正概念である「シャプレー値」と対応していることが指摘されている。Sjostrom (1991)など。

３．１．単一種一単位の取引：二位価格入札

二位価格入札は、ＶＣＧメカニズムの代表例である。連載第５回にしたがって、単一種一単位の取引問題を、

$\Omega_i = [0,1]$、$A = N$、

$v_i(a, \omega_i) = \omega_i$ if $a = i$

$v_i(a, \omega_i) = 0$ if $a \neq i$

と定式化する。二位価格入札は、効率的な直接メカニズム(g^*, x^*)として、

$g^*(\omega) = i$ only if $\omega_i \geq \omega_j$ for all $j \in N$、

$x_i^*(\omega) = \max_{j \neq i} \omega_j$ if $g^*(\omega) = i$

$x_i^*(\omega) = 0$ if $g^*(\omega) \neq i$

と定義される。つまり、各入札者iは指値ω_iを表明し、最高指値の入札者$g^*(\omega) \in N$が落札し、二位価格$\max_{j \neq g(\omega)} \omega_j$を支払う。非落札者は何も支払わない。

二位価格入札がＶＣＧメカニズムに一致することは、以下のように示される。ＶＣＧメカニズム(g, x)における落札者$g(\omega)$の支払額は、$g = g^*$として、

$$\max_{a \in A} \sum_{j \neq g(\omega)} v_j(a, \omega_j) = \max_{j \neq g(\omega)} \omega_j \text{ および } \sum_{j \neq g(\omega)} v_j(g(\omega), \omega_j) = 0$$

であることから、

$$x_{g(\omega)}(\omega) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq g(\omega)} v_j(a, \omega_j) - \sum_{j \neq g(\omega)} v_j(g(\omega), \omega_j) = \max_{j \neq g(\omega)} \omega_j$$

である。これは二位価格入札の支払額$x^*_{g(\omega)}(\omega)$と一致している。また、非落札者$i \neq g(\omega)$の支払額は、

$$\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) = \max_{j \neq i} \omega_j \text{ および } \sum_{j \neq i} v_j(g(\omega), \omega_j) = \omega_{g(\omega)} = \max_{j \neq i} \omega_j$$

であることから、

$$x_i(\omega) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) - \sum_{j \neq i} v_j(g(\omega), \omega_j) = 0$$

であり、二位価格入札の支払額$x_i^*(\omega)$と一致している。

定理 7-4：二位価格入札は、ＶＣＧメカニズムである。

３．２．単一種複数単位および一単位需要の取引：一律価格入札[6]

単一種財を複数（$K \geq 2$）単位売却する状況を考える。各プレーヤーiのタイプ集合を$\Omega_i = [0,1]$とし、各プレーヤーはたかだか一単位のみを需要すると仮定する。配分$a \in A$は、売却されるK単位がどのプレーヤーに割り当てられるかを示す。よって、任意の配分aはプレーヤー集合の部分集合として表され、配分集合aの元の個数はK、つまり$|a| = K$、であることが仮定される。

売却されるK単位は、配分$a \subset N$内の各プレーヤーに一単位ずつ割り当てられ、売れ残りはないとする。以上より、配分集合は

$$A = \{a \subset N : |a| = K\}$$

と定義されることになる。売却される単位数は入札者数より少ない、つまり$K < N$、と仮定する。各プレーヤーの配分にたいする評価関数は、

$$v_i(a, \omega_i) = \omega_i \quad \text{if} \quad i \in a$$

$$v_i(a, \omega_i) = 0 \quad \text{if} \quad i \notin a$$

と定義される。

「一律価格入札（Uniform Price Auction）」(g^*, x^*)は、指値の高い順から上位K人に落札され、非落札者の中で最も高い指値を、落札者共通の取引価格とするオークションルールである。つまり、一律価格入札(g^*, x^*)は、

$$i \in g^*(\omega) \quad \text{only if} \quad \omega_i \geq \omega_j \quad \text{for all} \quad j \notin g^*(\omega),$$

$$x_i^*(\omega) = \max_{j \notin g^*(\omega)} \omega_j \quad \text{if} \quad i \in g^*(\omega)$$

$$x_i^*(\omega) = 0 \quad \text{if} \quad i \notin g^*(\omega)$$

---

[6] Milgrom (2004, Chapter 7)を参照のこと。

と定義される。一律価格入札における取引価格 $\max_{j \notin g^*(\omega)} \omega_j$ は、需給均衡価格とみなすことができる。指値の上位者に落札されるので、配分ルールは効率的である。

各入札者がたかだか一単位のみを需要する仮定の下では、一律価格入札は、ＶＣＧメカニズム (g,x) に一致することが、以下のように示される。（$g = g^*$ とする。）プレーヤー i が落札者になる場合、

$$\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) = \sum_{j \in a \setminus \{i\}} \omega_j + \max_{j \notin a} \omega_j \text{ および } \sum_{j \neq i} v_j(g^*(\omega), \omega_j) = \sum_{j \in a \setminus \{i\}} \omega_j$$

であるから、ＶＣＧメカニズムによる支払額は、

$$x_i(\omega) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) - \sum_{j \neq i} v_j(g^*(\omega), \omega_j) = \max_{j \notin a} \omega_j$$

となり、一律価格入札と一致する。プレーヤー i が落札者でない場合は、

$$\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) = \sum_{j \in a} \omega_j \text{ および } \sum_{j \neq i} v_j(g^*(\omega), \omega_j) = \sum_{j \in a} \omega_j$$

であるから、ＶＣＧメカニズムによる支払額は、

$$x_i(\omega) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) - \sum_{j \neq i} v_j(g^*(\omega), \omega_j) = 0$$

となり、やはり一律価格入札と一致する。

定理 7-5 : 各入札者がたかだか一単位のみを需要する仮定下では、一律価格入札はＶＣＧメカニズムである。

３．３．単一種複数単位および複数需要の取引：ヴィックリー入札[7]

単一種複数単位の取引において、プレーヤーが複数単位を需要する可能性のある場合には、一律価格入札のような、需給均衡価格で取引する設計方法では、誘因整合性と配分効率性を両立させることはできない。

各プレーヤー $i \in N$ のタイプを、K 次元ベクトル

$$\omega_i = (\omega_i^1, \omega_i^2, \ldots, \omega_i^K) \in [0,1]^K$$

[7] Vickrey (1961), Milgrom (2004, Chapter 7), Krishna (2010, Chapters 12 and 13)を参照のこと。

と定義する。ここで、$\omega_i^k \in [0,1]$ は、プレーヤー i が k 単位目を獲得することによる価値の増加分を表わす。価値の増加分は数量に応じて逓減する、つまり、不等式

$$\omega_i^1 \geq \omega_i^2 \geq \cdots \geq \omega_i^K$$

を仮定する。

配分 a は、どのプレーヤーが何単位獲得するかを示す。つまり、

$$a = (a_1, ..., a_n) \text{、} a_i \in \{0, ..., K\} \text{、および} \sum_{i \in N} a_i = K$$

とし、売れ残りはないと仮定する。配分 a にしたがって、各プレーヤー i は a_i 単位を獲得し、実現される価値評価額は、

$$v_i(a, \omega_i) = \sum_{k=1}^{a_i} \omega_k$$

になる。

この場合、効率的な配分ルール $g = g^*$ は、任意の $(i, j, \omega) \in N^2 \times \Omega$ について、$g^*(\omega) = a$ として、

$$\omega_i^{a_i} \geq \omega_j^{a_j + 1}$$

が成立するルールになる。（$\omega_i^{K+1} = 0$ とする。）この不等式は、任意のプレーヤー i に割り当てられた 1 単位を別のプレーヤー j に割り当てても価値は高まらないことを意味する。

「ヴィックリー入札（Vickrey Multiunit Auction）」(g^*, x^*) は、一律価格入札のように需給均衡価格を支払わせるのとはことなる仕方で、支払ルールを特定する、効率的直接メカニズムである。任意のプレーヤー i について、他のプレーヤーの一単位当たりの価値全体 $\{\omega_j^k\}_{j \neq i, 1 \leq k \leq K}$ を、大きい値から順番にならべたものを、$\{\delta^l(i, \omega_{-i})\}_{l=1}^{(n-1)K}$ と表わす。不等式

$$\delta^1(i, \omega_{-i}) \geq \delta^2(i, \omega_{-i}) \geq \cdots \geq \delta^{(n-1)K}(i, \omega_{-i})$$

が成り立ち、任意の $j \in N \setminus \{i\}$ と $k \in \{1, ..., K\}$ について、ある $l \in \{1, ..., (n-1)K\}$ が存在して、

$$a_j^k = \delta^l(i, \omega_{-i})$$

が成立する。つまり、プレーヤー $j \neq i$ の k 番目の価値評価額 a_j^k は、プレーヤー i を除いたプレーヤーの価値全体の中で l 番目であり、$\delta^l(i, \omega_{-i})$ に等しい。

$\{\delta^l(i, \omega_{-i})\}_{l=1}^{(n-1)K}$ をもとにして、ヴィックリー入札ルール (g^*, x^*) における入札者 i の支払額は、$a = g^*(\omega)$ として、

$$x^*{}_i(\omega) = \sum_{k=K-a_i+1}^{K} \delta^k(i, \omega_{-i}) \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega$$

と定義される。入札者 i が a_i 単位を獲得することによって、他のプレーヤーは a_i 単位分の獲得機会を失うため、$\sum_{k=K-a_i+1}^{K} \delta^k(i, \omega_{-i})$ の損失が発生する。ヴィックリー入札は、この損失分を入札者 i に支払うことを要求するルールである。

ヴィックリー入札は、ＶＣＧメカニズム (g, x) と一致する。$g = g^*$ として、

$$\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) = \sum_{k=1}^{K} \delta^k(i, \omega_{-i}) \text{および} \sum_{j \neq i} v_j(g(\omega), \omega_j) = \sum_{k=1}^{K-a_i} \delta^k(i, \omega_{-i})$$

であるから、ＶＣＧメカニズムによる支払額は、

$$x_i(\omega) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a, \omega_j) - \sum_{j \neq i} v_j(g^*(\omega), \omega_j) = \sum_{k=K-a_i+1}^{K} \delta^k(i, \omega_{-i})$$

となり、ヴィックリー入札による支払額に一致する。

定理 7-6：ヴィックリー入札ルールはＶＣＧメカニズムである。

３．４．複数種の取引：線形評価関数

K 個の異なる品質の財、財１、財２、…、財 B を同時に売却する状況を考察する。各財 $k \in \{1, ..., K\}$ の品質は、パラメーター $b^k \in (0, \infty)$ で表され、

$$b^1 > b^2 > \cdots > b^K$$

とする。パラメーターの値が高いほど高品質であり、品質の優劣は入札者全員に共通である。各入札者はたかだか一財のみを需要すると仮定する。よって、任意の配分$a \in A$は、

$$a = (a_1, ..., a_n)、\ a_i \in \{1, ..., K, K+1\}、$$

$$a_i \neq a_j \quad \text{if} \quad a_i \neq K+1$$

と表わされる。配分aにしたがって、各入札者$i \in N$は財a_iを獲得する。$a_i = K+1$は、プレーヤーiがどの財も獲得しないことを意味する。$b^{K+1} = 0$とする。

各プレーヤー$i \in N$の各財$k \in \{1, ..., K\}$に対する評価は、高品質であるほど高く、高いタイプであるほど高い。単純化のため、各プレーヤーiの評価関数は線形である、つまり

$$v_i(a_i, \omega_i) = b^{a_i} \omega_i \quad \text{for all} \quad (a_i, \omega_i)$$

を仮定する[8]。入札者数は売却される財の数以上である、つまり$N \geq K$、を仮定する。

上述した複数種の取引の代表的事例は、スポンサードサーチ・オークションである[9]。検索エンジンは、キーワードごとの検索画面上に、広告用のポジション（スポンサードサーチ）をKポジション用意している。これらのポジションの獲得をめぐって、N社が入札に参加し、そのうちK社がいずれかのポジションをひとつ獲得する。

検索エンジンのユーザーは、ポジションをクリックすると、広告主の提供する広告内容を見ることができ、広告主の製品の購入を検討することになる。ポジションには優劣があり、一定期間のクリック回数の期待値はポジションごとにことなる。任意のポジションkの期待クリック数をb^kとし、入札者に共通とする。

---

8 例えば、Mussa and Rosen (1978)を参照のこと。

9 Krishna (2010, Chapter 17), Edelman, Ostrovsky, and Schwarz (2007)などを参照せよ。

一回のクリックがもたらす期待便益は、入札者のタイプごとにことなる。タイプω_iの入札者iは、一回のクリックからω_iの期待便益を得る。ポジションkを獲得することによるタイプω_iの入札者iの期待便益は$\omega_i b^k$になる。

プレーヤーを財評価（タイプ）の高い順にならべかえて、

$$\omega_{\iota(1,\omega)} \geq \omega_{\iota(2,\omega)} \geq \cdots \geq \omega_{\iota(n,\omega)}$$

となるように、全単射$\iota(\cdot,\omega): N \to N$を定義する。タイププロファイル$\omega$において、プレーヤー$i=\iota(l,\omega)$は$l$番目に高いタイプを意味する。効率的配分ルール$g$は、高いタイプのプレーヤーに優先的に高品質の財を割り当てる、つまり、任意のプレーヤー$i \in N$について、

$$g_i(\omega) = l \quad \text{if} \quad i = \iota(l,\omega) \quad \text{and} \quad l \leq K$$

$$g_i(\omega) = K+1 \quad \text{if} \quad i = \iota(l,\omega) \quad \text{and} \quad l > K$$

をみたすルールになる。プレーヤーiがl番目に高いタイプ、つまり$i=\iota(l,\omega)$、であり、$l \leq K$ならば、財lを獲得することになる。しかし、$l > K$ならば、なにも獲得できない。

上述した複数種の取引において、ＶＣＧメカニズム(g,x)における支払いルールxは、任意の(i,ω)について、

$$x_i(\omega) = \sum_{k=l}^{K} \omega_{i(k+1,\omega)}(b^k - b^{k+1}) \quad \text{if} \quad i = \iota(l,\omega) \quad \text{and} \quad l \leq K$$

$$x_i(\omega) = 0 \quad \text{if} \quad i = \iota(l,\omega) \quad \text{and} \quad l > K$$

と定義されることになる。$l > K$をみたすプレーヤー$\iota(l,\omega)$は財を獲得できず、支払もゼロである。最低品質の財、財K、を獲得するプレーヤー$\iota(K,\omega)$は、順位のひとつ低いプレーヤー$\iota(K+1,\omega)$の評価に相当する額$p^K = \omega_{i(K+1,\omega)} b^K$を支払う。この額は、プレーヤー$\iota(K+1,\omega)$と、財$K$の獲得をめぐって、二位価格入札をした場合の落札価格に相当する。

任意の品質の財kを獲得するプレーヤー$\iota(k,\omega)$は、

$$\omega_{i(k+1,\omega)}(b^k - b^{k+1}) + p^{k+1}$$

を支払う。プレーヤー $\iota(k,\omega)$ はすでに財 $k+1$ 以上の品質を獲得することが約束されており、少なくとも p^{k+1} の支払いを要求される。プレーヤー $\iota(k,\omega)$ は実際には１ランク上の財 k を獲得することになる。その際、$\omega_{\iota(k+1,\omega)}(b^k-b^{k+1})$ を追加的に支払うことになる。この追加支払額は、財 $k+1$ から財 k への品質向上分 b^k-b^{k+1} をめぐって、プレーヤー $\iota(k,\omega)$ とプレーヤー $\iota(k+1,\omega)$ が、二位価格入札した場合の落札価額に相当する。

上述した直接メカニズムがＶＣＧメカニズムになることが、以下のように確かめられる。プレーヤー $\iota(l,\omega)$ について、$l\le K$ ならば、

$$\max_{a\in A}\sum_{j\neq i}v_j(a,\omega_j)=\sum_{k=1}^{l-1}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k+\sum_{k=l}^{K}\omega_{\iota(k+1,\omega)}b^k$$

および

$$\sum_{j\neq i}v_j(g(\omega),\omega_j)=\sum_{k=1}^{l-1}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k+\sum_{k=l+1}^{K}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k$$

であることから、ＶＣＧメカニズムの支払い額は

$$x_i(\omega)=\max_{a\in A}\sum_{j\neq i}v_j(a,\omega_j)-\sum_{j\neq i}v_j(g(\omega),\omega_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{l-1}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k+\sum_{k=l}^{K}\omega_{\iota(k+1,\omega)}b^k-\{\sum_{k=1}^{l-1}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k+\sum_{k=l+1}^{K}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{l-1}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k+\sum_{k=l}^{K}\omega_{\iota(k+1,\omega)}b^k-\{\sum_{k=1}^{l-1}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k+\sum_{k=l+1}^{K}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k\}$$

$$=\sum_{k=l}^{K}\omega_{\iota(k+1,\omega)}(b^k-b^{k+1})$$

となり、上述した支払ルールに一致する。$l>K$ ならば、

$$\max_{a\in A}\sum_{j\neq i}v_j(a,\omega_j)=\sum_{k=1}^{K}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k \text{ および } \sum_{j\neq i}v_j(g(\omega),\omega_j)=\sum_{k=1}^{K}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k$$

であるから、ＶＣＧメカニズムの支払い額は

$$x_i(\omega)=\max_{a\in A}\sum_{j\neq i}v_j(a,\omega_j)-\sum_{j\neq i}v_j(g(\omega),\omega_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{K}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k-\sum_{k=1}^{K}\omega_{\iota(k,\omega)}b^k=0$$

であり、やはり上述したメカニズムの支払ルールに一致する。

４．公開型入札とＶＣＧメカニズムの関係

ＶＣＧメカニズムは、封印型の直接メカニズムとして定義されている。現実の多くの局面では、せり上げ入札に代表される公開型のオークションルールが使われている。例えば、複数種複数単位の取引においては、封印型の直接メカニズムでは、各入札者は、一度に全てのパッケージについての価値評価を表明しなければならないので、必然的に具く雑な意思決定を強いられることになる。しかし、公開型であれば、価値評価についての私的情報を、平易な仕方で、徐々に表明すればいいので、入札手続きの複雑性を緩和できる。

公開型でありながら、ＶＣＧメカニズムと同じ配分と支払をもたらすようなオークションルールにはどのようなものがあるか。以下に、いくつかの事例を紹介する。

４．１．せり上げ入札

連載第５回において解説済みであるが、単一種一単位の取引におけるせり上げ入札は、二位価格入札、つまりＶＣＧメカニズム、と同じ結果をもたらす。せり上げ入札では、自身の価値評価までせり上げに応じることが優位戦略になる。

単一種複数単位の取引において、各入札者がたかだか一単位を需要する仮定下では、せり人が最低価格から徐々に単位価格をせり上げていく「時計入札（Clock Auction）」が、代表的な公開型ルールのひとつである[10]。入札者は、せり人が公示する単位価格に対して、一単位需要する意思があるかどうかを表明する。表明された需要量の総和（需要者数）が供給量Kを上回る限り、せり人

---

[10] Milgrom (2004, Chapter 7).

は公示価格をせり上げ、需要が供給を上回らなくなる時点でせり上げを終了する。せり上げ終了時点での単位価格で一律に取引される。

時計入札においては、自身の財評価までせり上げに応じるのが、優位戦略になる。せり上げ終了時点の価格は、$K+1$番目に高い価値評価、つまり需給均衡価格、に一致するので、一律価格入札、つまりＶＣＧメカニズム、と同じ配分と支払が達成されることになる。

しかし、各入札者が複数単位を需要する可能性がある場合には、時計入札のように、需給均衡価格を発見し、それを取引価格に用いるやり方では、効率的配分は達成できない。例えば、各入札者はせり人が公示する単位価格で何単位需要したいかを表明するとし、せり人は、表明された需要量の総和が供給量Kを上回らなくなる時点でせり上げを終了し、終了時点での単位価格で一律に取引されるとしよう。この場合、公示された単位価格にたいして、何単位需要したいかを正直に表明するならば、効率的配分が達成されることになる。しかしながら、正直な表明は、ナッシュ均衡にならない。

例として、入札者二人に対して 10 単位が供給される状況を考えよう。各入札者iの価値評価額は

$$\omega_i^1=10、\omega_i^2=9、\omega_i^3=8、\omega_i^4=7、\omega_i^5=6、\omega_i^6=5、\omega_i^7=4、\omega_i^8=3、$$

$$\omega_i^9=2、\omega_i^{10}=1$$

とする。正直に需要表明されるならば、取引価格は５になり、各入札者ともに、５単位を獲得し、利得は

$$10+9+8+7+6-5\times5=15$$

となる。しかし、例えば、公示価格が４.1 までせり上げられた時、入札者 1 が６単位でなく 4 単位を需要すると虚偽表明すると、この時点でせり上げは終了し、４.1 が取引価格になる。入札者 1 は 4 単位を単位価格 4.1 という安価で購入できることになるので、入札者１の利得は

$$10+9+8+7-4.1\times4=17.6$$

となり、15 より高くなる。したがって、入札者は、実際よりも低めに需要表明すること（Demand Reduction）によって、単位価格を下げて利益を稼ごうとする

インセンティブを持つ。これは、正直に需要表明された場合の支払額がＶＣＧメカニズムのそれとはことなることに起因する。

４．２．オースベルメカニズム[11]

第３．３節で説明した、単一種複数単位の取引において、個別入札者が複数単位を需要する可能性がある場合、もし消費される単位数に応じて価値が逓減する状況、つまり

$$\omega_i^1 \geq \omega_i^2 \geq \cdots \geq \omega_i^K$$

がみたされる状況であるならば、「オースベルメカニズム」と呼ばれる、修正された時計入札方式が、ＶＣＧメカニズムと同じ配分と支払をもたらす。

せり人は最低価格から単位価格をせり上げ、入札者は、希望需要量を随時表明する。この時、需要量を後から増やせないという制限を設けておく。この制限のおかげで、せり上げが終了する前の段階で、各入札者にとって、総供給量から他のプレーヤーの需要量を差し引いた残りは、最低限獲得できる数量とみなすことができる。

たとえば、入札者二人、$K=5$、

$$\omega_1^1 = 10、\ \omega_1^2 = 8、\ \omega_1^3 = 6、\ \omega_1^4 = 4、\ \omega_1^5 = 2$$

$$\omega_2^1 = 9、\ \omega_2^2 = 7、\ \omega_2^3 = 5、\ \omega_2^4 = 3、\ \omega_2^5 = 1$$

とする。せり人の価格が 1 円を超えると、入札者２は需要を 5 単位から 4 単位に減らす。この段階で、相手入札者１は、最低限 1 単位の獲得を確保したことになる。

オースベルメカニズムは、購入が確定した時点での公示価格を、確定した単位の取引価格に随時設定していく入札方式である。上の例では、入札者１は、まずは、1 円の支払いで一単位目を確保したことになる。

---

[11] Ausubel (2004), Krishna (2010, Chapter 12)を参照のこと。

せり上げが 2 円に到達すると、今度は入札者１が需要を５単位から４単位に減らす。この時点で、相手入札者２は一単位を確保でき、確保した一単位分を２円で購入することになる。

せり上げが 3 円に到達すると、入札者２はさらに一単位分需要をへらすので、相手入札者１は、2 単位目を 2 円で購入することになる。以下同様にして、せり人は、５円までせり上げると、総需要は供給量と同じ５単位になるので、せり上げを終了する。こうして、入札者１は３単位を1+3+5＝9円、入札者２は２単位を2+4＝6円で購入することになる。これらの金額はＶＣＧメカニズムの支払額に一致している。

オースベルメカニズムでは、入札者の購入が確保された時点で、随時購入価格が確定されていく設計方法である。その価格は、相手がその単位の購入機会を失うことによる損失分に相当するため、ＶＣＧメカニズムの支払設定と同じにある。

４．３．複数種の取引におけるせり上げ入札[12]

第 3.4 節で説明した、スポンサードサーチに代表される、線形評価関数を仮定した複数種取引においては、どのような公開型オークションを使えば、ＶＣＧメカニズムと同じ配分と支払が達成されるか、を解説する。入札者はたかだか一財のみを需要すると仮定して、以下のような時計入札方式を考えよう。

せり人は最低価格からせり上げ、入札者はせり上げに応じるか否かを随時表明する。一旦応じないと表明すると、入札から退出し、その後は参加できないとする制限を設ける。せりに参加している入札者が一人になるまでせり上げが続けられる。

最後まで退出しなかった入札者は、一番良い品質の財（財１）を獲得する。財１の落札価格は、せりあげ終了時の価格、つまり二番目に居残り続けた入札者の退出価格 p^1 とする。財２は、二番目に居残り続けた入札者が獲得し、３番

[12] Krishna (2010, Chapter 17), Edelman, Ostrovsky, and Schwarz (2007)を参照せよ。

目に居残り続けた入札者の退出価格 p^2 を支払うとする。以下同様に、財 k は、$k+1$ 番目に居残り続けた入札者の退出価格 p^k を払うとされる。

以下に示される戦略プロファイルは、上述した入札方式におけるナッシュ均衡になる。任意のせり上げの時点において、まだ退出していない入札者の数を k とする。$k > n - K$ である場合、入札者参加者は、いずれかの財を獲得できることがまだ保証されていない状況にある。この場合、任意の入札参加者 i は、公示価格が最低品質財 K についての価値評価額 $\omega_i b^K$ に到達するまで、せり上げに応じる。

$k > n - K$ である場合、入札参加者は、財 k 以上の品質の獲得が保証されている状況にある。この場合には、任意の入札参加者 i は、公示価格が

$$\sum_{k=l-1}^{K} \omega_{i(k+1,\omega)}(b^k - b^{k+1})$$

に達するまで、せり上げに応じる。

上述した戦略プロファイルは、相手の価値評価額（タイプ）を知らなくても、プレイすることが可能である。そのため、戦略プロファイルがナッシュ均衡であれば、それは事後均衡でもある。

直前の退出価格が p^k であった場合、退出せずに居残っている各入札者は、今退出することで財 k を p^k 円で獲得できることが保証される。退出せずに、せりあけに応じ続けることによって、価格 $p > p^k$ で 1 ランク上の財 $k-1$ を獲得できる場合と比べると、

$$\omega_i b^{k-1} - p > \omega_i b^k - p^k$$

ならば、せり上げに応じ続けたほうが得であり、逆に

$$\omega_i b^{k-1} - p < \omega_i b^k - p^k$$

ならば、退出して財 k を獲得した方が得である。よって、公示価格 p が

$$\omega_i b^{k-1} - p < \omega_i b^k - p^k \text{ つまり } p = \omega_i (b^{k-1} - b^k) + p^k$$

をみたすまで退出せずに居残って、この価格に到達した時点で退出するのが得策になる。この価格に到達しても、さらに居残り続けて、より高品質の財の獲

得をねらう可能性も考えられる。しかし、他の入札者も同様の戦略にしたがうならば、このような可能性は期待できないことが、容易に証明できる。よって、上述した戦略プロファイルはナッシュ均衡になる[13]。

８．次回の予告

今回は、私的価値の仮定下で、効率的配分を達成させる、誘因整合的なメカニズムの設計方法を考察した。グローブスメカニズム、およびその特殊ケースであるＶＣＧメカニズムがその代表例になる。これら以外にベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合的かつ効率的なメカニズムを探しても、期待収入、期待利得、期待支払額の観点から、実質的にことなるメカニズムは存在しないことが説明された。

財の売り手は、現状の参加入札者を所与として、グローブスメカニズムやＶＣＧメカニズム以上の期待収入を獲得したいと望むならば、必然的に効率的でない配分ルールを検討することになる。次回は、売り手が、効率的配分の達成ではなく、期待収入を最大化するように、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合的なメカニズムを設計するにはどうしたらいいか、を解説する。非効率的な配分ルールをどのように設定すれば、売り手は期待収入を最大化できるかが、主要な論点になる。

[13] スポンサードサーチ・オークションの場合、広告主は、ユーザーがクリックするごとに、一定金額を検索エンジンに支払う。支払の総額ではなく、１クリックごとの金額について、せり上げをおこなうように、オークションルールを設定することができる。その場合でも、同様の議論が成立する。

参考文献

Ausubel, L. (2004): “An Efficient Ascending-Bid Auction for Multiple Objects,” *American Economic Review* 94, 1452-1475.

Clarke, E. (1971): “Multipart Pricing of Public Goods,” *Public Choice* 11, 17-33.

Edelman, B., M. Ostrovsky, and M. Schwarz (2007), “Internet Advertising and the Generalized Seconf-Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords,” *American Economic Review* 97, 242-259.

Fudenberg, D. and J. Tirole (1993): *Game Theory*, MIT Press.

Green, J. and J.-J. Laffont (1977): “Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods,” *Econometrica* 45, 427-438.

Groves, T. “Incentives in Teams,” *Econometrica* 61, 617-631.

Krishna, V. (2010): *Auction Theory*, Academic Press.

Mas-Colell, A., M. Whinston, and J. Green (1995): *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

Milgrom, P. (2004): *Putting Auction Theory to Work*, Cambridge University Press.

Mussa, M. and S. Rosen (1978): “Monopoly and Product Quality,” *Journal of Economic Theory* 18, 301-317

Vickrey, W. (1961): “Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders,” *Journal of Finance* 16, 8-37.

Sjostrom, T. (1991): “A New Characterization of the Groves-Clarke Mechanism,” *Economics Letters* 36, 263-267.