2014 年 9 月 3 日

経済セミナー2014 年 10, 11 月号

「オークションとマーケットデザイン」**第 11** 回

松島斉

東京大学経済学研究科教授

分布が非独立である場合のメカニズムデザイン

前回までに説明された、ベイジアンゲームによるオークションおよびメカニズムデザインにおいては、概して、各プレーヤーのタイプの分布が独立であるとする「分布独立性」が仮定された。期待利得、期待支払額、期待収入に関する同値定理（第 6 回)、期待収入最大化オークション（第 8 回）などといった多くの議論は、この仮定に依存している。

本節は、各プレーヤーのタイプの分布が非独立である（従属である）状況を考察する。分布が非独立であるとは、各プレーヤーが他のプレーヤーのタイプの分布をどう予測しているかは、そのプレーヤーのタイプに依存する、ということである。これに対して、分布独立性では、各プレーヤーが他のプレーヤーのタイプの分布をどう予測しているかは、そのプレーヤーのタイプから独立に与えられている。

分布非独立性下では、支払ルールが要求する支払額の期待値は、プレーヤー自身の真のタイプによって異なる値になる。一方、分布独立性下では、期待支払額は、プレーヤー自身のタイプに無関係に定まる。

本節は、分布非独立性のため期待支払額がプレーヤー自身のタイプに依存することを、有効に活用すれば、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因両立性（BIC）、中間個人合理性（IIR）などといった諸条件の両立が容易になり、さらには、期待収入額を、プレーヤーに情報レントを一切与えずに、最大総余剰にまで高めることができることを説明する。

以降、各プレーヤーiのタイプ集合Ω_iは離散集合であると仮定する。

１．スコアリング・ルール

出発点として、「スコアリング・ルール」と呼ばれるくじの選択問題を解説しよう[1]。おこりうる事象全体の集合が離散集合Λで与えられるとする。計画者は、ある特定のプレーヤーに対して、各事象がどのような確率で発生するかについて、どのように予想しているかを聞き出したい。プレーヤーは、各事象$\lambda \in \Lambda$が確率$p(\lambda) \geq 0$で発生すると予想しているとしよう。（ここで、$\sum_{\lambda \in \Lambda} p(\lambda) = 1$である。）計画者はこの確率分布$p$を正しく知りたい。そこで、以下の仕方で、このプレーヤーから確率分布pを聞き出そうと考えた。

すなわち、プレーヤーが任意の確率分布$\tilde{p} \in P$を表明した暁に各事象$\lambda \in \Lambda$が発生したならば、計画者は、あらかじめ定められた「スコア」$\chi(\lambda, \tilde{p})$円をプレーヤーに支払う、とするのである。（ここで、Pはタイププロファイル上の確率分布全体の集合を表す。）この時、プレーヤーは、$\tilde{p} \in P$を表明することによって、各事象$\lambda \in \Lambda$が発生したならば$\chi(\lambda, \tilde{p})$円を獲得できる「くじ」を選んだことになる。よって、正直に確率分布を表明した場合に入手するくじが、獲得金額の期待値を最大にするように、スコア$\chi(\lambda, \tilde{p})$を設定すればいい。

計画者は、スコアを

[1] Johnson, Pratt, and Zeckhauser (199)を参照のこと。スコアリング・ルールは、メカニズムデザインのみならず、繰り返しゲームにおける均衡戦略の設計など、様々なインセンティブの問題に応用されている。例えば、Kandori and Matsushima (1998)を参照のこと。

$$\chi(\lambda, \tilde{p}) = 2\tilde{p}(\lambda) - \sum_{\tilde{\lambda}\in\Lambda} \tilde{p}(\tilde{\lambda})^2 \quad \text{for all} \quad \lambda \in \Lambda \quad \text{and} \quad \tilde{p} \in P$$

と設定したとしよう。この場合、以下の定理が示すように、プレーヤーは、どの偽りの分布よりも真の確率分布 p を優先的に表明するインセンティブを持つことになる。このように正直な確率分布表明を促すスコアリング・ルールは、「プロパー・スコアリング・ルール」と呼ばれる。

定理 11-1：任意の確率関数 $p \in P$ にしたがって計算された、スコア $X(\lambda, \tilde{p})$ の期待値

$$E[\chi(\lambda, \tilde{p}) \mid p] \equiv \sum_{\lambda\in\Lambda} \{2\tilde{p}(\lambda) - \sum_{\tilde{\lambda}\in\Lambda} \tilde{p}(\tilde{\lambda})^2\} p(\lambda)$$

は、$\tilde{p} = p$ の時、その時にのみ、最大化される。つまり、任意の $p \in P$ について、厳密な不等式

$$E[\chi(\lambda, p) \mid p] > E[\chi(\lambda, \tilde{p}) \mid p] \quad \text{for all} \quad \tilde{p} \in P \setminus \{p\}$$

が成立する。

証明：$E[\chi(\lambda, \tilde{p}) \mid p]$ を最大化する $\tilde{p} \in P$ は、制約条件 $\sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda) = 1$ の下で $E[\chi(\lambda, \tilde{p}) \mid p]$ を最大化する解が非負ベクトルである場合には、その解と一致することになる。よって、後者の問題の解が $\tilde{p} = p$ であることを示せばよい。

$\tilde{p}(\lambda)$ を微小単位 $\Delta > 0$ 増やし、同時に $\tilde{p}(\tilde{\lambda})$ を同単位 Δ 減らすとしよう。（ここで、$\tilde{\lambda} \neq \lambda$ とする。）この時、期待値の変化分は、

$$\{\frac{\partial E[\chi(\lambda, \tilde{p}) \mid p]}{\partial \tilde{p}(\lambda)} - \frac{\partial E[\chi(\lambda, \tilde{p}) \mid p]}{\partial \tilde{p}(\tilde{\lambda})}\}\Delta$$

$$= [\{2p(\lambda) - 2\tilde{p}(\lambda)\} - \{2p(\tilde{\lambda}) - 2\tilde{p}(\tilde{\lambda})\}\Delta$$

に近似される。$p(\lambda) > \tilde{p}(\lambda)$ および $p(\tilde{\lambda}) < \tilde{p}(\tilde{\lambda})$ であれば、変化分は正になるので、期待値は上昇することになる。このことは、正しい確率の値に近づければ、期待値 $E[\chi(\lambda, p') \mid p]$ は必ず高まることを意味する。よって、$\tilde{p} = p$ が唯一の解であることが証明された。

Q.E.D.

定理 11-1 を使えば、任意の配分ルール g について、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性（BIC）をみたすように、支払ルール x を設計することが可能になる。

ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合性（BIC）：直接メカニズム (g,x) は、正直戦略プロファイルがベイジアン・ナッシュ均衡である場合、つまり、任意の $i\in N$，$\omega_i\in\Omega_i$，$\omega_i'\in\Omega_i$ について、

（１）　$$E[v_i(g(\omega),\omega)-x_i(\omega)\,|\,\omega_i]\geq E[v_i(g(\omega_i',\omega_{-i}),\omega)-x_i(\omega_i',\omega_{-i})\,|\,\omega_i]$$

が成立する場合、ベイジアン・ナッシュ均衡誘因整合的（Bayesian Incentive Compatible, BIC）であると呼ばれる。（ここで、$E[\cdot\,|\,\omega_i]$ は、ω_{-i} についての、タイプ ω_i の条件付き期待値を意味する。）

計画者は、各プレーヤーについて、他のプレーヤーのタイプの分布についての予想が、タイプに応じて異なると考えているとする。つまり、以下に示されるような、分布非独立性を意味する最小限の条件を仮定する。

条件１（弱分布独立性）：任意の $i\in N$、$\omega_i\in\Omega_i$、$\omega_i'\in\Omega_i\setminus\{\omega_i\}$ について、

$$p_i(\cdot\,|\,\omega_i)\neq p_i(\cdot\,|\,\omega_i')$$

が成立する、つまり、ある $\omega_{-i}\in\Omega_{-i}$ について、

$$p_i(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)\neq p_i(\omega_{-i}\,|\,\omega_i')$$

が成立する。

条件１の下では、どの配分ルールに対しても、定理 11-1 に示されるプロパー・スコアリング・ルールを使うことによって、BIC をみたす直接メカニズムを設計することができる。

定理 11-2：条件 1 の下では、任意の配分ルール g について、直接メカニズム (g,x) が BIC をみたす支払ルール x が存在する。

証明：任意の $i\in N$ について、支払ルールを

$$x_i(\omega)=k_i[2p_i(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)-\sum_{\omega'_{-i}\in\Omega_{-i}}p_i(\omega'_{-i}\,|\,\omega_i)^2]\quad \text{for all}\quad \omega\in\Omega$$

と特定する。ここで、$k_i>0$ は正の実数で、十分に大きな値とする。定理 11-1 より、

$$E[x_i(\omega)\,|\,\omega_i]-E[x_i(\omega'_i,\omega_{-i})\,|\,\omega_i]>0\quad \text{for all}\quad \omega'_i\in\Omega_i\setminus\{\omega_i\}$$

が成立している。任意の $\xi>0$ について、k_i を十分に大きくとれば、

$$E[x_i(\omega)\,|\,\omega_i]-E[x_i(\omega'_i,\omega_{-i})\,|\,\omega_i]>\xi\quad \text{for all}\quad \omega'_i\in\Omega_i\setminus\{\omega_i\}$$

が成立する。ξ を十分に大きくとって、

$$E[v_i(g(\omega'_i,\omega_{-i}),\omega)\,|\,\omega_i]-E[v_i(g(\omega),\omega)\,|\,\omega_i]<\xi\quad \text{for all}\quad \omega'_i\in\Omega_i\setminus\{\omega_i\}$$

とすると、

$$\begin{aligned}&E[v_i(g(\omega'_i,\omega_{-i}),\omega)\,|\,\omega_i]-E[v_i(g(\omega),\omega)\,|\,\omega_i]<\xi\\&<E[x_i(\omega)\,|\,\omega_i]-E[x_i(\omega'_i,\omega_{-i})\,|\,\omega_i]\quad \text{for all}\quad \omega'_i\in\Omega_i\setminus\{\omega_i\}\end{aligned}$$

が成立するから、定理 11-2 は証明された。

Q.E.D.

定理 11-2 における支払ルールは、プロパー・スコアリング・ルールを土台にしており、各プレーヤーは、虚偽表明すると、支払額の期待値が大きく上昇するように設計されている。このことは、分布非独立性下では、支払ルールが、配分ルール g や利得関数 v_i の形状の細部には無関係に設計できることを示唆している。

２．中間合理性と期待収入最大化[2]

[2] この節については、Cremer and McLean (1988)を参照されたい。

連載第 8 回において、オークションの売り手は、期待収入を最大化するためには、配分ルールを非効率にすることを説明した。例えば、単一種一単位取引において、売り手は、二位価格入札に最低入札価格（留保価格）を設定して、効率性をゆがめることによって、期待収入を最大化する。

しかし、この説明は、分布独立性に強く依存している。分布が非独立であれば、売り手は、効率性を維持したまま、期待収入を最大化することができる。しかも、後述する、条件 1 を強めたある条件のもとでは、買い手の情報レントをゼロにすることまで可能になる。つまり、売り手は、効率的配分がもたらす最大化総余剰をすべて自身の収入とすることができる。

例えば、単一種一単位取引の場合、売り手は、二位価格入札に最低入札価格を設けるかわりに、入札参加者全員に強制的に「くじ」を手渡す。このくじを上手にデザインしておけば、売り手は、最大化総余剰の総額を収入とすることができる。

任意の直接メカニズム(g,x)が BIC および IIR をみたしているとしよう。

中間個人合理性（IIR）: 直接メカニズム(g,x)は、任意の$i \in N$、$\omega_i \in \Omega_i$について、

$$E[v_i(g(\omega),\omega)-x_i(\omega)\,|\,\omega_i] \geq 0$$

をみたす場合、中間個人合理性（IIR）をみたすと呼ばれる。

各プレーヤーiについて、他のプレーヤーのタイププロファイルω_{-i}の実数値関数を$y_i:\Omega_{-i} \to R$と表わすことにする。実数値関数プロファイル$y=(y_i)_{i \in N}$をうまく設定して、支払関数xを

$$\tilde{x}=x+y\text{、}$$

つまり

$$\tilde{x}_i(\omega)=x_i(\omega)+y_i(\omega_{-i}) \quad \text{for all} \quad i \in N \quad \text{and} \quad \omega \in \Omega$$

に置き換えることによって、直接メカニズム$(g,\tilde{x})$が IIR を等式でみたすようにできる、つまり、以下に示される「総余剰収入（Full Surplus Extraction, FSE）」

をみたすようにできることを示そう。（y_i はプレーヤー i のタイプ表明から独立であるから、$(g,\tilde{x})$ は、(g,x) 同様に、BIC をみたしている。）

総余剰収入（FSE）: 直接メカニズム $(g,\tilde{x})$ は、IIR を等式でみたす場合、つまり、任意の $i \in N$、$\omega_i \in \Omega_i$ について、

（２）　$$E[v_i(g(\omega),\omega) - x_i(\omega) - y_i(\omega_{-i}) \mid \omega_i] = 0$$

をみたす場合、総余剰収入（FSE）をみたすと呼ばれる。

等式（２）は、任意のプレーヤー $i \in N$ について、$|\Omega_i|$ 本の連立一次方程式

（３）　$$\sum_{\omega_{-i}\in\Omega_{-i}} y_i(\omega_{-i}) p(\omega_{-i} \mid \omega_i) = \sum_{\omega_{-i}\in\Omega_{-i}} \{v_i(g(\omega),\omega) - x_i(\omega)\} p(\omega_{-i} \mid \omega_i) \quad \text{for all} \quad \omega_i \in \Omega_i$$

を全てみたす $|\Omega_{-i}|$ 個の未知数、$y_i(\omega_{-i})$、$\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$、が存在する、つまり、等式（３）で表される連立方程式の解が存在することを意味する。総余剰収入（FSE）がみたされるかどうかは、各プレーヤー i について、$|\Omega_{-i}|$ 個の未知数をもつ $|\Omega_i|$ 本の連立一次方程式の解が存在するかどうかという数学問題に帰着することになる。

一般に、β 個の未知数をもつ、α 本の連立一次方程式は、$\alpha\times\beta$ 行列 $A = (a_{rh})_{\substack{1\le r\le\alpha \\ 1\le h\le\beta}}$、$\alpha$ 次元ベクトル $b = (b_r)_{1\le r\le\alpha}$、および未知数を表す β 次元ベクトル $d = (d_r)_{1\le r\le\beta}$ によって、

（４）　$$Ad = b$$

と表わされる。ここで、b および d は列ベクトルを表し、b' および d' は行ベクトルを表すとする。例えば、

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\alpha \end{pmatrix}、\ b' = (b_1,\ldots,b_\alpha)$$

と表される。

連立一次方程式（４）をみたす未知数ベクトル d が存在するための十分条件としては、行列 A を構成する α 個の β 次元ベクトル $a_r=(a_{rh})_{1\le h\le\beta}$、 $r\in\{1,...,\alpha\}$、が「線形独立」であることが知られている。ここで、$a_r=(a_{rh})_{1\le h\le\beta}$、$r\in\{1,...,\alpha\}$、が線形独立であるとは、任意の α 次元ベクトル $k=(k_r)_{1\le r\le\alpha}$ について、

$$\sum_{r=1}^{\beta}k_r a_r=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

が成立する場合には

$$k_r=0 \quad \text{for all} \quad r\in\{1,...,\alpha\}$$

が必ず成立することを意味する。いいかえると、任意のベクトル a_r は他のベクトル $a_{r'}$、 $r'\ne r$、の線形結合として表すことが出来ない、ということである。

行数 α が列数 β 以下である（$\alpha\le\beta$）と仮定して、α 個の β 次元ベクトル a_r、$r\in\{1,...,\alpha\}$、が線形独立である（あるいは、行列 A の階数（ランク）が α である）場合、行列 A は「フルランク（Full Rank、FR）」であると呼ばれる。行数 α が列数 β 以下である場合には、FR は一般的になりたつ数学的条件と考えてよい。

条件２（フルランク、FR）：連立一次方程式を意味する $\alpha\times\beta$ 行列 $A=(a_{rh})_{\substack{1\le r\le\alpha\\ 1\le h\le\beta}}$ について、α 個の β 次元ベクトル $a_r=(a_{rh})_{1\le h\le\beta}$ は線形独立である。

我々の直面する問題、つまり、各プレーヤー i について等式（２）をみたす y_i が存在するための条件を明らかにする問題、は、上述した数学問題に照らし合わせるならば、

$\alpha=|\omega_{-i}|$、

$\beta=|\omega_i|$、

$a_{rh}=p(\omega_{-i}^h\mid\omega_i^r)$ for all $r\in\{1,...,\beta\}$、

$d_h=y_i(\omega_{-i}^h)$、

$$b_r = \sum_{\omega_{-i} \in \Omega_{-i}} \{v_i(g(\omega_{-i}, \omega_i^r), \omega_{-i}, \omega_i^r) - x_i(\omega_{-i}, \omega_i^r)\} p(\omega_{-i} | \omega_i^r)$$

に対応することになる。この場合、フルランク（FR）条件は、他のプレーヤーのタイププロファイルに対する各タイプω_iの条件付き確率分布$p(\cdot|\omega_i)$が、別のタイプの条件付き確率分布、$p(\cdot|\omega_i')$、$\omega_i' \neq \omega_i$、とは線形独立の関係にあることを意味する。FR 条件下では、総余剰収入（FSE）をみたすy_iが存在することになる。よって、BIC および IIR をみたしつつ、総余剰全額を収入とすることが可能になる直接メカニズムが存在することが示されたことになる。

定理 11-3 : FR 条件下では、任意の配分ルールgについて、直接メカニズム(g,x)が BIC, IIR, および FSE をみたす支払ルールxが存在する。

$y_i : \Omega_{-i} \to R$は、プレーヤーiに、配分問題の参加時に強制的に割り当てられるくじと解釈できる。プレーヤーiは、他のプレーヤーのタイプ表明ω_{-i}に依存して $y_i(\omega_{-i})$を支払うことになる。ここでは、スコアリングルールとはことなり、プレーヤーに、複数のくじから一つを選ばせることは、要求していない。その代わりに、ある特定のくじが、プレーヤーのタイプに応じて、その期待支払額がことなるように設計されている。

配分ルールが効率的ならば、FR 条件下では、売り手は、取引によって発生しうる最大総余剰を全額期待収入とすることができる。たとえば、単一種一単位取引において、売り手は、最低入札価格を設定することなく二位価格入札を実施し、同時に、落札者非落札者を問わず、くじの受け取りを強制するならば、BIC および IIR の制約下で、最大総余剰を全額収入とすることが可能になる。

３．Fan の定理[3]

[3] この節における中心的な定理は Fan (1956)に示されている。関連するメカニズムデザインの文献には、D'Aspremont and Gerard-Varet (1979), Aoyagi (1999), Matsushima (1990, 2007)などがある。Fan の定理は、モラルハザードを回避する契約理論にも応用されている。例えば、Legros and Matsushima (1991)を参照のこと。

この連載における検討課題のいくつかは、BIC、DIC、EPIC といった誘因整合性条件、IIR、EXIR といった個人合理性条件、予算制約条件（BB）、総余剰収入条件（FSE）など、様々な制約条件を同時にみたす直接メカニズムが存在するかどうか、という問題形式である。離散のタイプ集合を仮定した場合、これらの形式の問題は、連立一次方程式および連立一次不等式の解が存在するかどうか、という数学問題に帰着する。

β 個の未知数をもつ、α 本の連立一次方程式および γ 本の連立不等式は、$\alpha \times \beta$ 行列 A、$\gamma \times \beta$ 行列 B、α 次元ベクトル b、γ 次元ベクトル c、および未知数を表す β 次元ベクトル d によって、

（５）　　$Ad = b$　および　$Bd \leq c$

と表わされる。（５）で示される連立一次方程式および連立一次不等式をみたす未知数ベクトル d が存在するための必要十分条件は、以下に示される通りである。

定理４（Fan の定理）：（５）をみたす d が存在するための必要十分条件は以下の通りである。任意の α 次元ベクトル $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_\alpha \end{pmatrix} \in R^\alpha$ および任意の非負の γ 次元ベクトル $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_\gamma \end{pmatrix} \geq 0$ について、もし

$$\delta' A + \varphi' B = 0$$

が成り立つならば、

$$b'\delta + c'\varphi \geq 0$$

が成り立つ。

例として、Fan の定理を使えば、分布独立性、分布非独立性を問わず、任意の配分ルール g に対して、BIC および BB をみたす支払ルール x が存在するため

の必要十分条件を、一般的に示すことができる。BB は、$|\Omega|$本の連立方程式

$$\sum_{i\in N} x_i(\omega)=0 \quad \text{for all} \quad \omega\in\Omega$$

で表わされる。BIC は、$\sum_{i\in N}|\Omega_i|^2$ 本の連立一次不等式

$$\sum_{\omega_{-i}\in\Omega_{-i}} x_i(\omega)p(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)-\sum_{\omega_{-i}\in\Omega_{-i}} x_i(\omega_{-i},\omega_i')p(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)$$

$$\leq \sum_{\omega_{-i}\in\Omega_{-i}} \{v_i(g(\omega),\omega)-v_i(g(\omega_{-i},\omega_i'),\omega)\}p(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)$$

$$\text{for all} \quad i\in N,\ \ \omega_i\in\Omega_i,\ \text{and}\ \ \omega_i'\in\Omega_i,$$

で表わされる。必要十分条件は以下の通りである。

任意の $(\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}\in R^{|\Omega|}$, および $(\alpha_i(\omega_i,\omega_i'))_{\substack{i\in N\\ \omega_i\in\Omega_i\\ \omega_i'\in\Omega_i}}\in R^{\sum_{i\in N}|\Omega_i|^2}$ について、もし

$$\alpha_i(\omega_i,\omega_i')\geq 0 \quad \text{for all} \quad i\in N,\ \ \omega_i\in\Omega_i,\ \text{and}\ \ \omega_i'\in\Omega_i,$$

および

$$p(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)\sum_{\omega_i'}\alpha_i(\omega_i,\omega_i')-\sum_{\omega_i'}p(\omega_{-i}\,|\,\omega_i')\alpha_i(\omega_i',\omega_i)=\lambda(\omega)$$

$$\text{for all} \quad i\in N \quad \text{and} \quad \omega\in\Omega,$$

が成立するならば、

$$\sum_{(i,\omega)}[\sum_{\omega_i'}\{v_i(g(\omega_{-i},\omega_i'),\omega)-v_i(g(\omega),\omega)\}p(\omega_{-i}\,|\,\omega_i)\alpha_i(\omega_i,\omega_i')]\leq 0$$

が成立する。この条件が、Fan の定理の意味する必要十分条件に対応する。

この必要十分条件をさらに整理すると、任意の戦略プロファイル s 、および任意のタイププロファイルの分布関数 $q:\Omega\to[0,1]$ について、もし

（６） $$q(\omega)=\sum_{\omega_i'}p(\omega_{-i}\,|\,\omega_i')s_i(\omega_i')(\omega_i) \quad \text{for all} \quad i\in N \quad \text{and} \quad \omega\in\Omega$$

が成立するならば、

（７） $$\sum_{(i,\omega)}\sum_{\omega_i'}v_i(g(\omega_{-i},\omega_i'),\omega)p(\omega)s_i(\omega_i)(\omega_i')\leq\sum_{(i,\omega)}v_i(g(\omega),\omega)p(\omega)$$

が成立する、という条件に書き直すことができる。（ここで、$s_i(\omega_i)(\omega_i')$ とは、タイプ ω_i が確率 $s_i(\omega_i)(\omega_i')$ で ω_i' を表明することを意味する。）

等式（6）は、各プレーヤーiが、正直にタイプ表明せずに、単独で、混合戦略s_iにしたがって虚偽表明した場合、同じタイププロファイルの分布qが実現されることを意味する。このことは、実現される表明の分布qが正直な表明の分布pと異なるとしても、いったい誰の虚偽表明が原因で分布が歪められたかを、分布の形状変化だけから判断することができない、つまり、どのプレーヤーも虚偽表明をした疑いをぬぐえない、という状況にあることを意味する。

この場合には、分布の形状変化から、虚偽表明の疑いのあるプレーヤーを突き止めて、支払による罰則を与えることができない。BBの制約条件より、罰則となる支払は他のプレーヤーへの所得移転でなければならないが、他のプレーヤーもまた虚偽表明の疑いのある罰則の対象者であるからである。

不等式（7）は、各プレーヤーには、不等式（6）に示される、同じ分布変化をもたらす虚偽表明をするメリットが、そもそもないことを意味する。これは、支払ルールを通じて罰則をわざわざ与えなくても、各プレーヤーは、このような虚偽表明するインセンティブをそもそももたない、ということである。

各プレーヤーは、虚偽表明によって、配分からの期待便益

$$\sum_{\omega}\sum_{\omega_i'} v_i(g(\omega_{-i},\omega_i'),\omega)\,p(\omega)s_i(\omega_i)(\omega_i')$$

を獲得することになる。（7）の左辺に示されているのは、これらの期待便益の総和

$$\sum_{(i,\omega)}\sum_{\omega_i'} v_i(g(\omega_{-i},\omega_i'),\omega)\,p(\omega)s_i(\omega_i)(\omega_i')$$

である。一方、（7）の右辺には、正直表明による配分からの期待便益の総和

$$\sum_{(i,\omega)} v_i(g(\omega),\omega)\,p(\omega)$$

が示されている。つまり、不等式（7）は、虚偽表明によってもたらされる配分からの期待便益の総和が、正直表明による配分からの期待便益の総和を上回らないことを意味している。

以上の説明を言い換えるならば、もし各プレーヤーがある仕方で虚偽表明をすることにメリットがある、つまり、不等式（7）が成立しない、とするな

らば、その場合には必ず等式（６）が成立しない、つまり、誰が虚偽表明の犯人でないかを、表明された分布から割り出すことが出来る、ということである。便益をもたらす虚偽表明については、表明された分布から、犯人の疑いのある人とそうでない人を、必ず識別することができる、という条件が、BIC と BB を両立させるための、必要かつ十分条件になるのである。

４．AGV メカニズム再考

連載第 10 回において、私的価値および分布独立性下では、BIC と BB をみたす効率的な直接メカニズムが存在することを学んだ。その際、AGV メカニズムと称される具体的なメカニズムデザインの仕方が解説された。この節では、私的価値および分布独立性下で BIC と BB をみたす効率的な直接メカニズムが存在することを、もう一度、Fan の定理を使って確認してみよう。

まず、分布独立性下で等式（６）がみたされるケースでは、必ず

$$q = p$$

が成り立つことに気付かれたい。よって、各プレーヤーが元の分布を変えない仕方で虚偽表明をする時、その時にのみ、不等式（７）が要求されることになる。この時、私的価値より、不等式（７）は、

$$\sum_{\omega}\sum_{i}\{\sum_{\omega_i'} v_i(g(\omega'),\omega_i)s(\omega)(\omega')\}p(\omega) \le \sum_{\omega}\sum_{i} v_i(g(\omega),\omega_i)p(\omega)$$

と書き改められる。効率性より

$$\sum_{i}\{\sum_{\omega_i'} v_i(g(\omega'),\omega_i)s(\omega)(\omega')\} \le \sum_{i} v_i(g(\omega),\omega_i)$$

であるから、不等式（７）が成立することが確かめられた。

Fan の定理は、分布独立性、分布非独立性を問わず、一般的な存在条件を示してくれるという意味において、かなり万能な性質といえよう。しかし、AGV メカニズムのような具体的な設計案を示してはくれない。この点において、Fan の定理の経済学への応用には限界がある。

５．分布独立性か分布非独立性か？

条件１に示されるように、分布非独立性下では、タイプがことなると他のプレーヤーのタイプについての予想も異なるとされる。しかし、経済学的な状況によっては、異なるタイプ間で、他のプレーヤーのタイプについての予想は同じであるものの、利得関数の形状は異なるとされるケースは、大いに考えられる。そのため、たとえ数学的性質としては分布非独立性に一般性があるとしても、経済学的な性質として分布非独立性が一般的であるとは、とても認められない。分布独立性も、分布非独立性も、どちらも、経済学的な状況に照らして検討されるべきである。

今回検討された支払ルールは、タイププロファイルによっては、大きな金額の支払いをプレーヤーに要求する。たとえば、二位価格入札にくじを導入した設計案は、情報レントをゼロにする一方で、入札者に巨額の支払を請求する。そのため、事後的には、入札者の便益は、取引前よりも下がってしまうことがおこりうる。よって、入札者は、事後的には、オークションに参加したことを後悔するはめになる。

これに対し、二位価格入札に代表される VCG メカニズムでは、このような事後的な後悔は起こりえないとする「事後個人合理性」（Ex-Post Individual Rationality、EPIR)がみたされている。

事後個人合理性（EPIR）：任意の $i \in N$ 、$\omega \in \Omega$ について、

$$v_i(g(\omega), \omega) - x_i(\omega) \geq 0$$

が成立する。

実際のプレーヤーは、このような巨額の支払いをする能力をもっていないかもしれない。そのため、くじの導入を検討する売り手は、債務不履行を恐れて、事前に、入札参加者に、高額の担保を要求するかもしれない。しかしなが

ら、このような担保要求は、有望だが予算制約のある入札者に、入札参加を躊躇させるだろう。

参考文献

Aoyagi, M. (1999): “Correlated types and Bayesian incentive compatible mechanisms with budget balance”, *Journal of Economic Theory* 79, 142–151.

Cremer, J. and R. McLean (1988): “Full extraction of the surplus in Bayesian and dominant strategy auctions”, *Econometrica* 56, 1247–1257.

D'Aspremont, C. and L.-A. Gerard-Varet (1979): “Incentives and incomplete information”, *Journal of Public Economics* 11, 25-45.

Fan, K. (1956): “On Systems of Linear Inequalities”, in *Linear Inequalities and Related Systems*, ed. by H. Kuhn and A. Tucker. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Johnson, S., J. Pratt, and R. Zeckhauser (199): “Efficiency despite mutually payoff-relevant private information: The finite case”, *Econometrica* 58, 873-900.

Kandori, M. and H. Matsushima (1998): “Private Observation, Communication, and Collusion,” *Econometrica* 66, 627-652.

Legros, P. and H. Matsushima (1991): “Efficiency in Partnerships,” *Journal of Economic Theory* 55, 296-322.

Matsushima, H. (1990): “Incentive compatible mechanisms with full transferability”, *Journal of Economic Theory* 54, 198–203.

Matsushima, H. (2007): “Mechanism Design with Side Payments: Individual Rationality and Iterative Dominance”, *Journal of Economic Theory* 133, 1-30.